Најнижи заједнички предак два чвора у стаблу

Софија Чебашек

Фебруар 2026.

Садржај

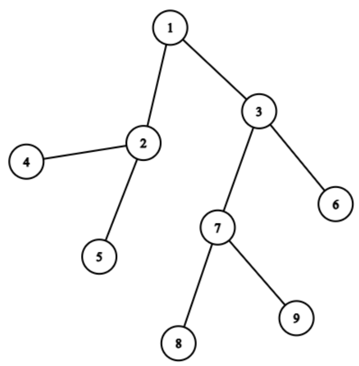
1 Увод

Дато је стабло са n чворова и његов корен. За два дата чвора, u и v, потребно је одредити најнижег заједничког претка (енг. *Lowest Common Ancestor - LCA*). Овај проблем је могуће решити на више начина, неки од њих су:

- Кретањем од два дата чвора навише у временској сложености $O(n)$;
- Користећи технику померања за степен двојке тј. технику бинарног скока (енг. *binary lifting*) у временској сложености $O(\log n)$.

2 Алгоритам

За дато стабло са n чворова и кореном, за два његова дата чвора неопходно је одредити чвор који је најдаљи од корена, а предак је оба дата чвора.



Слика 1: Пример стабла

2.1 Основни појмови

Дефиниција 2.1. Чвор p је **предак** чвора u уколико се налази на путу од чвора u до корена стабла.

Дефиниција 2.2. Чвор l је **заједнички предак** чворова u и v, уколико је предак оба чвора. Уколико је l на највећој удаљености од корена стабла од свих заједничких предака, тада је он **најнижи заједнички предак**.

На слици 1 корен стабла је чвор 1. Тада је најнижи заједнички предак чворова 8 и 9 чвор 7, чворова 5 и 6 чвор 1, чворова 3 и 4 чвор 1 итд.

2.2 Идеја алгоритма

Дефиниција 2.3. Нека је $m = \lceil \log n \rceil$. Матрица $predak[n][m]$ у пољу $predak[i][j]$ садржи претка чвора i који се налази на растојању 2^j, где растојање између два чвора представља број грана на путу између њих. У случају да такав предак не постоји, када је чвор i на растојању од корена мањем од 2^j, у пољу $predak[i][j]$ биће сачувана вредност корена стабла.

Лема 2.1. *Важи* $predak[i][j] = predak[predak[i][j-1]][j-1]$.

Дефиниција 2.4. У низу $ulaz[n]$, елемент $ulaz[i]$ представља време прве посете, односно време уласка у подстабло чвора i приликом обиласка стабла, док у низу $izlaz[n]$, елемент $izlaz[i]$ представља време изласка из чвора i и његовог подстабла.

Користећи лему 2.1 и чињеницу да је $predak[i][0]$ родитељ чвора i, једним обиласком стабла (алгоритмом претраге у дубину) могуће је израчунати све елементе матрице $predak[n][m]$. Приликом обиласка стабла рачунаћемо и низове $ulaz[n]$ и $izlaz[n]$.

Корак	**Временска сложеност**
Иницијализација почетних низова	$O(n \log n)$
Провера да ли је један чвор предак другог	$O(1)$
Највиши чвор који није заједнички предак	$O(\log n)$
Сложеност алгоритма за један упит	$O(\log n)$
Укупна сложеност алгоритма за q упита	$O((n+q) \log n)$

Табела 1: Анализа временске сложености алгоритма

Теорема 2.1. *Чвор u је предак чвора v уколико важи* $ulaz[u] \leq ulaz[v]$ *и* $izlaz[u] \geq izlaz[v]$.

Након проласка кроз стабло, прво се провери да ли је неки од два дата чвора u и v предак другог. Уколико јесте, тај чвор представља њиховог најнижег заједничког претка. Уколико није, тражи се највиши предак чвора u, који није предак чвора v. Од чвора u се врши померање за највећи број облика 2^i, тако да $predak[u][i]$ није предак чвора v. Вредност i је на почетку $m-1$ и смањује се до 0, а уколико $predak[u][i]$ није предак чвора v, нови чвор u је чвор $predak[u][i]$ и алгоритам се наставља даље. Након m корака, чвор u ће имати вредност највишег чвора који није заједнички предак, а његов родитељ ће бити тражени чвор тј. чвор $predak[u][0]$ је тражени најнижи заједнички предак.

3 Закључак

Укупна сложеност описаног алгоритма за стабло са n чворова и q упита који су задати као пар чворова је $O((n+q) \log n)$. Једна од честих употреба алгоритма за одређивање најнижег заједничког претка је приликом одређивања растојања између два чвора стабла.