Линеарна алгебра и аналитичка геометрија

*-Теорија-*

# Садржај

**РЕЧ АУТОРА** Ово је **незванична** скрипта теорије предмета Линеарна алгебра и аналитичка геометрија. Скрипта прати предавања професорке др Александре Костић Матијевић. Аутори скрипте Вам желе срећу у учењу.

# 1

# Дефиниција поља

**Дефиниција 1.1.** Нека је А скуп са две бинарне операције + и · за које су задовољене следеће аксиоме:

1. за све $a, b, c \in A$ важи $(a + b) + c = a + (b + c)$
2. постоји $0 \in A$ такав да за све $a \in A$ важи $a + 0 = 0 + a = a$
3. за свако $a \in A$ постоји $a' \in A$ такав да је $a + a' = a' + a = 0$
4. за све $a, b \in A$ важи $a + b = b + a$
5. за све $a, b, c \in A$ важи $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
6. постоји $1 \in A$ такав да за све $a \in A$ важи $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
7. за свако $a \in A \setminus \{0\}$ постоји $a^{-1} \in A$ такво да је $a \cdot b = b \cdot a = 1$
8. за све $a, b \in A$ важи $a \cdot b = b \cdot a$
9. за све $a, b, c \in A$ важи $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ и $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Тада за А кажемо да је *поље*.

Примери:

- скупови $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$
- за прост број $p$, скуп $F_p = \{0, 1, ..., p-1\}$ са операцијама $x +_p y = (x+y) mod(p)$ (остатак при дељењу $x + y$ са $p$) и $x \cdot_p y = xymod(p)$.

# 2

# Системи линеарних једначина

Нека нам је дата једначина: $a \cdot x = b$ за $a, b \in F$(поље, код нас ће најчешће бити $F = \mathbb{R}$). Тражимо $x \in F$ за које важи једнакост $a \cdot x = b$

Разликујемо 3 могућности:

- $a \neq 0$
  онда је $x = \frac{b}{a}$ јединствено решење.
- $a = 0, b = 0$
  $0 \cdot x = 0$ - ова једнакост важи за све $x \in F$. За ову једначину кажемо да је *неодређена.*
- $a = 0, b \neq 0$
  $0 \cdot x = b$ - немогуће, па једначина нема решења.

**Дефиниција 2.1.** Линеарна једначина са $n$ непознатих је израз облика:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = b$$

где су $a_1, a_2, ..., a_n \in F$ коефицијенти, $b \in F$ слободан члан и $x_1, x_2, ..., x_n$ непознате.

**Дефиниција 2.2.** Систем линеарних једначина је коњункција неколико линеарних једначина:

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} (*)$$

систем од $m$ једначина са $n$ непознатих. Решење система је свака $n$-торка елемената из $F$ која, када се замени у систем, даје једнакости у $F$.

**Дефиниција 2.3.** Нека је $S$ скуп решења система:

1. ако је $S = \emptyset$, систем *нема* решење.
2. ако је $|S| = 1$ (број чланова скупа је једнак 1), систем има *јединствено* решење.
3. ако је $|S| > 1$, систем има више решења, тј. систем је *неодређен.*

Ако два система имају исти број непознатиш и исте скупове решења, кажемо да су та два система *еквивалентна.*

**Пример 1.** Нека су дата два система линеарних једначина:

$$(1)\begin{cases} x+y=3 \\ x+2y=5 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x-y=-1 \\ 2x+3y=8 \end{cases}$$

$$S_1=\{(1,2)\}, \quad S_2=\{(1,2)\}$$

(1) и (2) су еквивалентни системи.

За свођење система на еквивалентни који има једноставнији облик користимо елементарне трансформације.

**Дефиниција 2.4.** Постоји 3 типа елементарних трансформација (Гаусових операција):

1. замена места $i$-те и $j$-те једначина(где је $i \neq j$)
   $\Phi_{ij} : J_i \longleftrightarrow J_j$
2. додавање $i$-тој једначини $j$-те једначине помножене са $\lambda \in F$:
   $\Psi_{ij}(\lambda) : J_i \longrightarrow J_i + \lambda \cdot J_j$
3. множење $i$-те једначине елементом $\lambda \in F, \lambda \neq 0$:
   $\Theta_i(\lambda) : J_i \longrightarrow \lambda \cdot J_i$

Два система су елементарно еквивалентна ако један настаје из другог применом елементарних трансформација.

**Тврђење 2.1.** Свака елементарна трансформација система линеарних једначина има своју инверзну трансформацију:

1. $\Phi_{ij}^{-1} : J_j \longleftrightarrow J_i$
2. $\Psi_{ij}^{-1}(\lambda) : J_i \longrightarrow J_i - \lambda \cdot J_j$
3. $\Theta_i^{-1}(\lambda) : J_i \longrightarrow \frac{1}{\lambda} \cdot J_i$

*Доказ.* Доказ директно из дефиниције елемнтарних трансформација (можемо се враћати „уназад” до почетног облика система). □

## 2.1 Гаусов метод

Нека је дат систем (∗). Алгоритам је следећи:

- тражимо промењиву (прву у низу $x_1, x_2, ..., x_n$) уз коју је коефицијент различит од нуле; ту промењиву назваћемо *пивот* (без умањења општости можемо претпоставити да је пивот $x_1$ са коефицијентом $a_{11} \neq 0$. Трансформацијама типа 1 доведемо жељену једначину на прво место.)
- маркирамо пивота и помоћу једначине у којој се пивот налази елементарним трансформацијама типа 2 елимишемо промењиву која је пивот (код нас $x_1$) из осталих једначина

$$J_i \longrightarrow J_i + (-\frac{a_{i1}}{a_{11}}) \cdot J_1, \quad 2 \leq i \leq m$$

Добијамо еквивалентан систем:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a'_{m1}x_1 + \ldots + a'_{mn}x_n &= b'_m \end{aligned}$$

Ово је систем од $(m-1)$ једначине са $(n-1)$ промењивом

- Сада аналогне трансформације примењујемо на прошли систем.

У коначном низу корака сведемо систем на степенаст облик:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n &= b_i \\ 0 &= b_{i+1} \\ &\vdots \\ 0 &= b_m \end{aligned}$$

где је $a'_{jj} \neq 0, j \leq m$. Можемо добити следеће системе:

1. Ако Гаусовом методом у неком кораку добијемо једначину облика

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = b', \quad b' \neq 0$$

која нема решење, тада ни сам систем нема решење

2. Ако стигнемо до једначине $a \cdot x_n = b, a \neq 0$ онда је $x_n = \frac{b}{a}$ и враћамо се сукцесивно да преко нађених променљивих „прочитамо" остале

3. Ако на крају стигнемо до једначине:

$$a_{mj} \cdot x_j + ... + a_{mj+1}x_{j+1} + ... + a_{mn}x_n = b, \quad a_{mj}, a_{mj+1} ..., a_{mn} \neq 0$$

Онда маркирамо једну промењливу, рецимо $x_j$. Маркиране променљиве су „везане" - њих изражавамо преко „слободних" које узимају произвољне вредности из поља $F$

$$x_j = \frac{1}{a}(b - a_{mj+1}\underbrace{x_{j+1}}_{\alpha_1} - ... - a_{mn}\underbrace{x_n}_{\alpha_j})$$

Дакле: $x_1 = \frac{1}{a}(b - a_{mj+1}\alpha_1 - ... - a_{mn}\alpha_j)$, где $\alpha_1, ..., \alpha_j \in F$. Сада се враћамо сукцесивно у претходне једначине да „прочитамо" остале променљиве. Систем је неодређен.

**Пример 2.** Нека је дат следећи степенаст систем:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - x_3 &= 1 \\ 3x_2 + x_3 &= 8 \\ x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Видимо је да систем има јединствено решење $(2, 1, 5)$, па је скуп решења једнак: $S = \{(2, 1, 5)\}$.

**Пример 3.** Нека је дат следећи систем:

$$\begin{aligned} x+y+z&=1\\ y+z&=5 \end{aligned}$$

Одавде добијамо да је $y=5-z$ и $x=1-y-z=-4$, па је систем решења $S=\{(-4,5-\alpha,\alpha|\alpha\in\mathbb{R}\}$.

**Дефиниција 2.5.** *Хомогени* систем је онај систем чији су сви слободни чланови једнаки нула:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n&=0\\ a_{21}x_1+...+a_{2n}x_n&=0\\ &\vdots\\ a_{m1}x_1+...+a_{mn}x_n&=0 \end{aligned}$$

Хомогени систем увек има бар једно решење, то решење је $(0,...,0)$, које зовемо тривијално решење.

**Тврђење 2.2.** Сваком систему можемо придружити хомогени систем. Решење система ће бити облика: решење хомогеног система + једно решење система (тј. полазног система).

*Доказ.* Рецимо да је $(h_1,h_2,...,h_n)$ решење хомогеног система а $(p_1,p_2,...,p_n)$ једно решење полазног система (партикуларно решење). Да ли је $(h_1+p_1,h_2+p_2,...,h_n+p_n)$ решење полазног система?

Посматрамо $i$-ту једначину, $i\in\{1,...,m\}$

$$a_{i1}(h_1+p_1)+a_{i2}(h_2+p_2)+...+a_{in}(h_n+p_n)=\underbrace{a_{i1}p_1+...+a_{in}p_n}_{b_i}+\underbrace{a_{i1}h_1+...+a_{in}h_n}_{0}=b_i+0=b_i$$

$\square$

# 3

# Матрице

**Дефиниција 3.1.** Ако су $m, n \in \mathbb{N}$ и $F$ поље, **матрица** формата (тј. типа) $m \times n$ над пољем $F$ је таблица облика

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

која се састоји од $m$ врста и $n$ колона.

Елемент $a_{ij} \in F$ се налази у пресеку $i$-те врсте и $j$-те колоне. Краћи запис $[a_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ или само $A = [a_{ij}]$ ако не треба нагласити формат.

Скуп $M_{mn}(F)$ је скуп свих матрица формата $m \times n$ над $F$. Ако матрица $A \in M_{mn}(F)$, онда матрица $A$ има $m$ врста и $n$ колона. Краћи записи:
$i$-та врста: $[a_{i1}a_{i2} \dots a_{in}] = A_{i\rightarrow}$
$j$-та колона: $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = A_{\downarrow j}$
Ако је $m = n$ кажемо да је матрица квадратна, а $M_n(F)$ скуп квадратних матрица формата $n$ над пољем $F$. Матрице које су формата $1 \times n$ зовемо врста-матрице, док матрице које су формата $m \times 1$ зовемо колона-матрице.

**Сабирање матрица** Ако су $A, B \in M_{mn}(F)$, где је $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$, $A+B = [a_{ij}]+[b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$, тј.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

**Важно:** Сабирамо матрице искључиво истог формата!

**Тврђење 3.1.** Сабирање матрица је:

1. Асоцијативно.
2. Комутативно.

*Доказ.* Доказујемо редом:

1. Нека су дате матрице $A, B, C \in M_{mn}(\mathbb{R})$. Онда је:

$$\begin{aligned}(A+B)+C &= ([a_{ij}]+[b_{ij}])+[c_{ij}] \\ &= [a_{ij}+b_{ij}]+[c_{ij}] \\ &= [(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}] \\ &= [a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})] \\ &= [a_{ij}]+[b_{ij}+c_{ij}] \\ &= [a_{ij}]+([b_{ij}]+[c_{ij}]) \\ &= A+(B+C)\end{aligned}$$

   тј. можемо писати само $A+B+C$

2. Нека су дате матрице $A, B \in M_{mn}(\mathbb{R})$. Онда је:

$$\begin{aligned}A+B &= [a_{ij}]+[b_{ij}] \\ &= [a_{ij}+b_{ij}] \\ &= [b_{ij}+a_{ij}] \\ &= [b_{ij}]+[a_{ij}] \\ &= B+A\end{aligned}$$

□

Нула матрица $\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ је неутрал за сабирање у $M_{mn}(F)$.

**Множење скаларом** Нека је $A \in M_{mn}(F), A = [a_{ij}]$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Онда је:

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot [a_{ij}] = [\lambda \cdot a_{ij}]$$

**Транспоновање матрица** То је унарна операција: $M_{mn}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{nm}(\mathbb{R})$, где је $A \longrightarrow A^T$ дефинисано са:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

тј. врсте матрице А постају колоне транспоната, док колоне матрице А постају врсте транспоната.

**Тврђење 3.2.** Важи следеће ($A, B \in M_{mn}(F), \lambda \in F$):

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$
2. $(\lambda A)^T = \lambda \cdot A^T$
3. $(A^T)^T = A$

*Доказ.* Доказиваћемо редом:

1. $(A+B)^T = ([a_{ij} + b_{ij}])^T = [a_{ji} + b_{ji}] = [a_{ji}] + [b_{ji}] = A^T + B^T$
2. $(\lambda A)^T = [\lambda a_{ij}]^T = [\lambda a_{ji}] = \lambda \cdot [a_{ji}] = \lambda \cdot A^T$
3. $(A^T)^T = ([a_{ij}]^T)^T = [a_{ji}]^T = [a_{ij}] = A$

$\square$

## 3.1 Множење матрица

**Дефиниција 3.2.** Нека су дате матрице $A \in M_{mk}(\mathbb{R}), A = [a_{ij}]$ и $B \in M_{kn}(\mathbb{R}), B = [b_{ij}]$. Множење матрица $A$ и $B$ као резултат даје матрицу $C \in M_{mn}(\mathbb{R})$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

где је $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ik} \cdot b_{kj} = A_{i\rightarrow} \cdot B_{\downarrow j}$.

**Важно:** Не могу се множити било које две матрице! Да би се матрице $A$ и $B$ могле множити број колона матрице $A$ мора бити једнак броју врста матрице $B$.

**Повезивање множења матрица са системом једначина** Систем линеарних једначина:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n =& b_1 \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n =& b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n =& b_m \end{aligned}$$

можемо матрично представити као:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{B}$$

Множење матрица нам помаже да скраћено записујемо системе: $A \cdot X = B$

**Тврђење 3.3.** Множење матрица је:

1. Асоцијативно.
2. Дистрибутивно у односу на сабирање.

*Доказ.* Доказујемо редом:

1. Нека је $A \in M_{mk}(\mathbb{R}), B \in M_{kl}(\mathbb{R}), C \in M_{ln}(\mathbb{R})$

$$\text{Доказујемо } \underbrace{\overbrace{(A \cdot B)}^{X} \cdot C}_{L} = \underbrace{A \cdot \overbrace{(B \cdot C)}^{Y}}_{D}$$

$X \in M_{ml}(\mathbb{R}), Y \in M_{kn}(\mathbb{R}), L \in M_{mn}(\mathbb{R}), D \in M_{mn}(\mathbb{R})$

$$x_{ij} = A_{i\to} \cdot B_{\downarrow j} = \sum_{p=1}^{k} a_{ip} \cdot b_{pj}$$

$$l_{ij} = X_{i\to} \cdot C_{\downarrow j} = \sum_{q=1}^{l} x_{iq} \cdot c_{qj} = \sum_{q=1}^{l} (\sum_{p=1}^{k} a_{ip} b_{pq}) \cdot c_{qj} = \sum_{q=1}^{l} \sum_{p=1}^{k} a_{ip \cdot b_{pq} \cdot c_{qj}}$$

$$y_{ij} = B_{i\to} \cdot C_{\downarrow j} = \sum_{q=1}^{l} b_{iq} \cdot c_{qj}$$

$$r_{ij} = A_{i\to} \cdot Y_{\downarrow j} = \sum_{p=1}^{k} a_{ip} \cdot y_{pj} = \sum_{p=1}^{k} a_{ip} \cdot (\sum_{q=1}^{l} b_{pq} c_{qj}) = \sum_{p=1}^{k} \sum_{q=1}^{l} a_{ip \cdot b_{pq} \cdot c_{qj}}$$

$\implies l_{ij} = r_{ij}$

$\implies L = R$

2. Нека је $A \in M_{mn}(\mathbb{R}), B, C \in M_{nk}(\mathbb{R})$

$$\text{Доказујемо } \underbrace{A \cdot \overbrace{(B + C)}^{X}}_{L} = \underbrace{\overbrace{A \cdot B}^{Y} + \overbrace{A \cdot C}^{Z}}_{R}$$

$X \in M_{nk}(\mathbb{R}), Y, Z \in M_{mk}(\mathbb{R}), L, R \in M_{mk}(\mathbb{R})$

$x_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$

$$\begin{aligned}
l_{ij} = A_{i\to} \cdot X_{\downarrow j} = \sum_{d=1}^{n} a_{id} \cdot x_{dj} &= \sum_{d=1}^{n} a_{id}(b_{dj} + c_{dj}) \\
&= \sum_{d=1}^{n} (a_{id} b_{dj} + a_{id} c_{dj}) \\
&= \sum_{d=1}^{n} a_{id} b_{dj} + \sum_{d=1}^{n} a_{id} c_{dj} \\
&= A_{i\to} \cdot B_{\downarrow j} + A_{i\to} \cdot C_{\downarrow j} \\
&= y_{ij} + z_{ij} = r_{ij} \\
&\implies L = R
\end{aligned}$$

□

**Важно:** множење матрица није комутативно! ($A \cdot B \neq B \cdot A$)

**Дефиниција 3.3.** Дијагонална матрица је матрица облика: $\operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_n \end{bmatrix}$.

Матрицу $E_n = \operatorname{diag}(1, 1, \ldots 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$ називамо јединичном матрицом реда $n$.

**Тврђење 3.4.** Ако је $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ тада је $E_m \cdot A = A$ и $A \cdot E_n = A$.

*Доказ.* Нека је матрица $B$ дата као $B = E_m \cdot A$. Доказујемо да је $B = A$. Означимо $E_m = E$. Сада је:

$$b_{ij} = E_{i\to} \cdot A_{\downarrow j} = \sum_{k=1}^{m} e_{ik} \cdot a_{kj}$$

Како је $e_{ik} \neq 0$ само када је $k = i$ онда је:

$$\sum_{k=1}^{m} e_{ik} \cdot a_{kj} = e_{ii} \cdot a_{ij} = 1 \cdot a_{ij} = a_{ij}$$

Одавде следи да је $B = A$.
Сада нека је матрица $C$ дата као $C = A \cdot E_n$. Доказујемо да је $C = A$. Означимо $E_n = E$. Имамо:

$$c_{ij} = A_{i\to} \cdot E_{\downarrow j} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot e_{kj}$$

Слично као за претходни доказ, $e_{kj} \neq 0$ само када је $k = j$. Дакле:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot e_{kj} = a_{ij} \cdot e_{jj} = a_{ij} \cdot 1 = a_{ij}$$

Значи $C = A$. □

## 3.2 Инверзибилне матрице

**Дефиниција 3.4.** Квадратна матрица $A \in M_n(F)$ је инверзибилна ако постоји матрица $B \in M_n(F)$ таква да је:

$$A \cdot B = B \cdot A = E_n$$

Матрицу $B$ означавамо као $B = A^{-1}$, и зовемо је *инверз* од А.

**Теорема 3.1.** Ако је $A \in M_n(F)$ инверзибилна матрица онда постоји тачно једна матрица $B \in M_n(F)$ за коју важи:

$$A \cdot B = B \cdot A = E_n$$

*Доказ.* Претпоставимо супротно. Нека су $B_1, B_2 \in M_n(\mathbb{R})$ различити инверзи од $A$, односно

$$A \cdot B_1 = B_1 \cdot A = E_n$$

и

$$A \cdot B_2 = B_2 \cdot A = E_n$$

Тада је

$$B_1 = B_1 \cdot E_n = B_1 \cdot (A \cdot B_2) = (B_1 \cdot A) \cdot B_2 = E_n \cdot B_2 = B_2$$

Што је контрадикција са претпоставком. $\square$

Дакле, инверз матрице $A$ је јединствен (уколико постоји).

**Тврђење 3.5.** Важи следеће ($A, B \in M_n(F)$):

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

*Доказ.* Доказиваћемо редом:

1. $A \cdot \underbrace{A^{-1}}_{B} = \underbrace{A^{-1}}_{B} \cdot A = E_n \Longrightarrow B^{-1} = A = (A^{-1})^{-1}$
2. Претпоставимо да је једнакост тачна. Докажимо да је $(AB)^{-1}$ и даље инверз матрице $AB$.
   $(AB) \cdot (AB)^{-1} = A \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_{E_n} \cdot A^{-1} = A \cdot E_n \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = E_n$
   $(AB)^{-1} \cdot (AB) = B^{-1} \cdot \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E_n} \cdot B = B^{-1} \cdot E_n \cdot B = B^{-1} \cdot B = E_n$
   Дакле, јесте и даље инверз.

$\square$

**Пример 4.** Пронаћи инверз матрице $A \in M_2(\mathbb{R})$ задата као $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

**Решење.** $A \cdot A^{-1} = E$ тј. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Добијамо систем:

$$\begin{aligned} x + 2z &= 1 \\ y + 2t &= 0 \\ 3x + 4z &= 0 \\ 3y + 4t &= 1 \end{aligned}$$

Решавањем датог система (остављамо читаоцу да сам реши систем) добијамо: $x = -2, y = 1, z = \frac{3}{2}$ и $t = -\frac{1}{2}$, тј. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

## 3.3 Елементарне трансформације матрица

**Дефиниција 3.5.** Елементарне трансформације на врстама матрице су облика:

1. $P_{ij} : V_i \longleftrightarrow V_j$ - замена $i$-те и $j$-те врсте. $P_{ij}(A)$ је матрица која се добије заменом $i$-те и $j$-те врсте матрице $A$.

2. $Q_{ij}(\alpha) : V_i \longrightarrow V_i + \alpha \cdot V_j$ - додавање $i$-тој врсти $j$-ту врсту помноженом са $\alpha$. $Q_{ij}(\alpha)(A)$ је матрица која се добије додавањем $i$-тој врсти матрице $A$ $j$-те врсте помножене са $\alpha$.

3. $R_i(\alpha) : V_i \longrightarrow \alpha \cdot V_i$ - множење $i$-те врсте са $\alpha$. $R_i(\alpha)(A)$ је матрица која се добије када се $i$-та врста матрице $A$ помножи са $\alpha$.

**Тврђење 3.6.** Свака од елементарних трансформација на врсте матрица има и своју инверзну:

1. $P_{ij}^{-1} : V_j \longleftrightarrow V_i$, тј. $P_{ij}^{-1} = P_{ji}$

2. $Q_{ij}^{-1}(\alpha) : V_i \longrightarrow V_i - \alpha V_j$, тј. $Q_{ij}^{-1}(\alpha) = Q_{ij}(-\alpha)$

3. $R_i^{-1}(\alpha) : V_i \longrightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot V_i$, тј. $R_i^{-1}(\alpha) = R_i(\frac{1}{\alpha})$

*Доказ.* Директно из дефиниције елементарних трансформација на матрицама. □

**Дефиниција 3.6.** За матрицу $B \in M_{mn}(\mathbb{R})$ кажемо да је врста-еквивалентна матрици $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$, и пишемо $A \sim_v B$, ако се матрица $B$ добија од матрице $A$ применом коначног броја елементарних трансформација на врстама.

**Теорема 3.2.** $\sim_v$ је релација еквиваленције.

*Доказ.* Доказаћемо рефлексивност, симетричност и транзитивност релације $\sim_v$.

- Рефлексивност: $A \sim_v A$ - увек тачно.
- Симетричност: Да ли важи $A \sim_v B \Longrightarrow B \sim_v A$? Ово важи јер свака од врста трансформација има своју инверзну. Ако је $B = T_k \dots T_1(A)$ где $T \in \{P_{ij}, Q_{ij}(\alpha), R_i(\alpha)\}$ тада је $A = T_1^{-1} \dots T_k^{-1}(B)$. Значи $B \sim_v A$
- Транзитивност: Да ли важи $A \sim_v B$ и $B \sim_v C \Longrightarrow A \sim_v C$. Како је $B = T_k \dots T_1(A)$ и $C = T'_l \dots T'_1(B)$ онда је $C = T'_l \dots T'_1 \underbrace{T_k \dots T_1(A)}_{B}$, тј. надовежемо трансформације. Онда је $A \sim_v C$.

□

**Дефиниција 3.7.** Елементарне трансформације на колонама матрице су облика:

1. $P^{ij} : K_i \longleftrightarrow K_j$ - замена $i$-те и $j$-те колоне. $P^{ij}(A)$ је матрица која се добије заменом $i$-те и $j$-те колоне матрице $A$.

2. $Q^{ij}(\alpha) : K_i \longrightarrow K_i + \alpha \cdot K_j$ - додавање $i$-тој колони $j$-те колоне помножене са $\alpha$. $Q^{ij}(\alpha)(A)$ је матрица која се добије додавањем $i$-тој колони матрице $A$ $j$-те колоне помножене са $\alpha$.

3. $R^i(\alpha) : K_i \longrightarrow \alpha \cdot K_i$ - множење $i$-те колоне елементом $\alpha$. $R^i(\alpha)(A)$ је матрица која се добије када се $i$-та колона матрице $A$ помножи са $\alpha$.

**Тврђење 3.7.** Свака од елементарних трансформација на колонама матрице има своју инверзну:

1. $P^{ij-1} : K_j \longleftrightarrow K_i$, тј. $P^{ij-1} = P^{ji}$
2. $Q^{ij-1}(\alpha) : K_i \longrightarrow K_i - \alpha \cdot K_j$, тј. $Q^{ij-1}(\alpha) = Q^{ij}(-\alpha)$
3. $R^{i-1}(\alpha) : K_i \longrightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot K_i$, тј. $R^{i-1}(\alpha) = R^i(\frac{1}{\alpha})$

**Дефиниција 3.8.** Матрица $B \in M_{mn}(\mathbb{R})$ је колона-еквивалентна матрици $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$, ознака $A \sim_k B$, ако се матрица $B$ добија од матрице $A$ коначним бројем трансформација на колонама.

**Теорема 3.3.** $\sim_k$ је релација еквиваленције.

*Доказ.* Скоро идентичан доказ као за $\sim_v$. □

**Лема 3.1.** 1. Ако је $T$ било која трансформација на врстама, онда је:

$$T(A) = T(E) \cdot A$$

2. Ако је $T$ било која трансформација на колонама, онда је:

$$T(A) = A \cdot T(E)$$

**Пример 5.** Ако је задата матрица $A$ као $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ онда је:

$$R_2(3)(A) = R_2(3)(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

**Пример 6.** Нека је $T = Q_{ij}(\alpha)$ и $A \in M_n(\mathbb{R})$. Онда је

$$T(A) = \begin{bmatrix} A_{1\rightarrow} \\ \vdots \\ A_{i\rightarrow} + \alpha A_{j\rightarrow} \\ \vdots \\ A_{n\rightarrow} \end{bmatrix} \leftarrow i$$

и

$$T(E) = \begin{bmatrix} E_{1\rightarrow} \\ \vdots \\ E_{i\rightarrow} + \alpha E_{j\rightarrow} \\ \vdots \\ E_{n\rightarrow} \end{bmatrix} \leftarrow i$$

Приметимо да можемо да издвојимо $i$-ту колону

$$A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i = A_{\downarrow i}$$

и $i$-ту врсту

$$\underset{\substack{\uparrow\\ i}}{[0\cdots 1\cdots 0]}\cdot A = A_{i\rightarrow}$$

Сада је

$$T(E)\cdot A = \begin{bmatrix} E_{1\rightarrow}\cdot A \\ \vdots \\ E_{i\rightarrow}\cdot A + \alpha E_{j\rightarrow}\cdot A \\ \vdots \\ E_{n\rightarrow}\cdot A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1\rightarrow} \\ \vdots \\ A_{i\rightarrow} + \alpha A_{j\rightarrow} \\ \vdots \\ A_{n\rightarrow} \end{bmatrix} = T(A)$$

**Дефиниција 3.9.** Матрица добијена од јединичне матрице применом тачно једне трансформације на врстама или колонама називамо *елементарна* матрица.

Значи, $E_{ij} := P_{ij}(E), E_{ij}(\alpha) := Q_{ij}(\alpha)(E), E_i(\alpha) := R_i(\alpha)(E)$.

Такође $E^{ij} := P^{ij}(E), E^{ij}(\alpha) := Q^{ij}(\alpha)(E), E^i(\alpha) := R^i(\alpha)(E)$.

**Пример 7.** Неки примери елеметарних матрица:

$$E_{21}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2(5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E^{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Лема 3.2.** Елементарне матрице су инверзибилне и важи:

$$(T(E))^{-1} = T^{-1}(E)$$

*Доказ.* Ако је $T$ трансформација на врстама, за било коју матрицу $A$ важи:

$$T(A) = T(E)\cdot A$$

Узмимо да је $A = T^{-1}(E)$, тада је

$$\underbrace{T(T^{-1}(E))}_{E} = T(E)\cdot T^{-1}(E)$$

односно

$$E = T(E)\cdot T^{-1}(E)$$

Значи $T^{-1}(E)$ је инверз од $T(E)$, тј. $(T(E))^{-1} = T^{-1}(E)$. Аналогно се може доказати ако је T трансформација на колонама. $\square$

Дакле, елементарне матрице су инверзибилне и њихови инверзи су елементарне матрице које су настале применом инверзних елеметарних трансформација.

**Пример 8.**

$$(E_{21}(3))^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = Q_{21}^{-1}(E_3) = Q_{21}(-3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(E_1(5))^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = R_1^{-1}(5)(E_2) = R_1(\frac{1}{5})(E_2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Дефиниција 3.10.** Матрице $A, B \in M_{mn}(\mathbb{R})$ су елементарно еквивалентне ако се матрица $B$ добија од матрице $A$ применом коначно елементарних трансформација било на врстама, било на колонама. Ознака: $A \sim_e B$.

**Теорема 3.4.** $\sim_e$ је релација еквиваленције.

*Доказ.* Тривијално. □

**Дефиниција 3.11.** Матрице $A, B \in M_{mn}(\mathbb{R})$ су еквивалентне ако постоје инверзибилне матрице $P \in M_m(\mathbb{R})$ и $Q \in M_n(\mathbb{R})$ такве да је

$$B = PAQ$$

Пишемо: $A \sim B$.

**Тврђење 3.8.** Матрице $A, B \in M_{mn}(\mathbb{R})$ су елементарно еквивалентне ако и само ако су еквивалентне, односно

$$A \sim_e B \Longleftrightarrow A \sim B$$

*Доказ.* ($\Longrightarrow$) Како је $A \sim_e B$, то је $B = T_k \dots T_1 A T_1' \dots T_l'$, где су $T_k \dots T_1$ трансформације на врстама, а $T_1' \dots T_l'$ трансформације на колонама. Трансформације замењујемо множењем матрица:

$$B = \underbrace{T_k(E) \cdots T_1(E)}_{P} \cdot A \cdot \underbrace{T_1'(E) \cdots T_l'(E)}_{Q} \Longrightarrow B = PAQ$$

$P, Q$ су инвертибилне као производ елементарних матрица које су инвертибилне. Дакле, $A \sim B$.

($\Longleftarrow$) доказ касније (свака инверзна матрица је производ елементарних). □

**Дефиниција 3.12.** Свака матрица $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ се може применом коначно елементарних трансформација на врстама и колонама свести на матрицу облика

$$A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Матрицу $A^0$ зовемо канонском матрицом матрице $A$.

**Алгоритам за налажење канонске матрице** Следећи алгоритам даје матрицу $A^0$:

1. Тражимо прву не-нула колону матрице $A$ (ако не постоји крај)
2. У пронађеној не-нула колони тражимо први не-нула елемент (пивот)
3. Заменимо прву врсту и врсту у којој се налази пивот, а потом заменимо прву колону и колону у којој се налази пивот
4. Множимо прву врсту инверзом пивота

5. Коришћењем добијене јединице и множењем прве врсте погодним елементом правимо нуле испод те јединице
6. Множењем прве колоне погодним елементом правимо нуле десно од јединице
7. Посматрамо подматрицу добијене матрице која настаје избацивањем прве врсте и прве колоне и идемо на први корак

**Пример 9.**

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&2&3&4\\0&0&2&-4&0&2\\0&0&2&3&1&-1\\0&0&3&1&1&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&0&2&-4&0&2\\0&0&0&2&3&4\\0&0&2&3&1&-1\\0&0&3&1&1&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&0&0&-4&0&2\\0&0&0&2&3&4\\2&0&0&3&1&-1\\3&0&0&1&1&0\end{bmatrix}\ /\cdot\tfrac{1}{2}\ \sim$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&-2&0&1\\0&0&0&2&3&4\\2&0&0&3&1&-1\\3&0&0&1&1&0\end{bmatrix}\ /\cdot(-2)\ \ /\cdot(-3)\ +\ +\ \sim\ \begin{array}{l}/\cdot(-1)\ +\\ /\cdot 2\ +\end{array}\begin{bmatrix}1&0&0&-2&0&1\\0&0&0&2&3&4\\0&0&0&7&1&-3\\0&0&0&7&1&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&0&2&3&4\\0&0&0&7&1&-3\\0&0&0&7&1&-3\end{bmatrix}\sim$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&2&0&0&3&4\\0&7&0&0&1&-3\\0&7&0&0&1&-3\end{bmatrix}\ /\cdot\tfrac{1}{2}\ \sim\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&\frac{3}{2}&2\\0&7&0&0&1&-3\\0&7&0&0&1&-3\end{bmatrix}\ /\cdot(-7)\ +\ +\ \sim\ \begin{array}{l}/\cdot(-2)\ +\\ /\cdot(-\frac{3}{2})\ +\end{array}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&\frac{3}{2}&2\\0&0&0&0&-\frac{19}{2}&-17\\0&0&0&0&-\frac{19}{2}&-17\end{bmatrix}\sim$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&-\frac{19}{2}&-17\\0&0&0&0&-\frac{19}{2}&-17\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&-\frac{19}{2}&0&0&-17\\0&0&-\frac{19}{2}&0&0&-17\end{bmatrix}\ /\cdot(-\tfrac{2}{19})\ \sim\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&\frac{34}{19}\\0&0&-\frac{19}{2}&0&0&-17\end{bmatrix}\ /\cdot\tfrac{19}{2}\ +$$

$$\sim\ \begin{array}{l}/\cdot(-\frac{34}{19})\ +\end{array}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&\frac{34}{19}\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}=A^0$$

Матрица $A^0$ је јединствена за дату матрицу $A$.

**Дефиниција 3.13.** Број јединица на почетном делу дијагонале матрице $A^0$ зове се *ранг* матрице А. Означава се са $rang(A)$ или $\rho(A)$.

Приметимо да је, за матрицу $A\in M_{mn}(\mathbb{R}), \rho(A)\le min\{m,n\}$.

**Тврђење 3.9.** Нека $A,B\in M_{mn}(\mathbb{R})$. Тада је $A\sim B \Longleftrightarrow rang(A)=rang(B)$.

*Доказ.* ($\Longrightarrow$) Нека је $A \sim B$ и $rang(A) = r$. Како је $A \sim A^0$ и $\sim$ је релација еквиваленције, па је и транзитивна и симетрична, следи:
$B \sim A$ и $A \sim A^0 \Longrightarrow B \sim A^0$, па је $rang(B) = r$.

($\Longleftarrow$) Ако је $rang(A) = rang(B)$, онда је $A^0 = B^0$. Како је $A \sim A^0 = B^0 \sim B$, па је због транзитивности $A \sim B$. $\square$

Дакле, број класа еквиваленције $\sim$ одређен је рангом матрица. Односно, има их $k+1$, где је $k = min\{m, n\}$, на $M_{mn}(\mathbb{R})$.

**Пример 10.** На $M_{35}(\mathbb{R})$ постоје 4 класе. Њихови представници су:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Теорема 3.5.** За квадратну матрицу $A \in M_n(\mathbb{R})$ следећа тврђења су еквивалентна:

1. $A$ је производ елементарних матрица
2. $A$ је инвертибилна
3. $A \sim E$
4. $A \sim_v E$
5. $A \sim_k E$

*Доказ.* Доказујемо ланац импликација:

$$1) \Longrightarrow 2) \Longrightarrow 3) \Longrightarrow 4) \Longrightarrow 5) \Longrightarrow 1)$$

1) $\Longrightarrow$ 2) Нека је $A = P_1 P_2 \cdots P_k$, где је $P_i, i \in \{1, k\}$ елементарна матрица. Самим тим, те матрице су инвертибилне па је:

$$A^{-1} = P_k^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1}$$

Значи, $A$ је инвертибилна.

2) $\Longrightarrow$ 3) Матрица $A$ се своди на матрицу $A^0$ трансформацијама на врстама и колонама, па је

$$A^0 = \underbrace{P_k \cdots P_1}_{P} A \underbrace{Q_1 \cdots Q_l}_{Q}$$

где $P$ представља производ елементарних матрица на врстама, а $Q$ на колонама. Значи $A^0 = PAQ$, где су $A, P, Q$ инвертибилне. Ако је $A$ инвертибилна, она нема 0-врсту ни 0-колону, јер постоји $B$ тако да је:

$$AB = BA = E$$

Како $E$ нема 0-врсту ни 0-колону, нема ни матрица $A$. Самим тим, немају је ни матрице $P$ и $Q$, па ни $PAQ = A^0$. Одавде следи да је $A^0 = E$, па је $A \sim E$.

3) $\Longrightarrow$ 4) Како је $A \sim E$, то је $E = PAQ$, где су $P$ и $Q$ производи елементарних матрица, па су и инвертибилне. Сада је:

$$A = \underbrace{P^{-1}E}_{P^{-1}} Q^{-1} = P^{-1}Q^{-1} = \underbrace{P^{-1}Q^{-1}}_{R} \cdot E = R \cdot E$$

Пошто $R$ представља производ елементарних матрица, одавде следи да је $A \sim_v E$.

4) $\Longrightarrow$ 5) $A \sim_v E$ па је $A = PE$, где је $P$ производ елементарних матрица. Онда је $A = P = E \cdot P$, па одавде следи да је $A \sim_k E$.

5) $\Longrightarrow$ 1) $A \sim_k E$ па је $E = AP$, где је $P$ производ елементарних матрица (па је и инвертибилна матрица). Према томе, $A = P^{-1}$, где је $P^{-1}$ такође производ елементарних матрица. □

**Последица 1.** Квадратна матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ има ранг $n$ ако и само ако је $A$ инвертибилна.

**Алгоритам за израчунавање инверза матрице** Важи: $A \sim_v E \Longleftrightarrow A$ је инвертибилна. Одавде је $\underbrace{P_k \dots P_1}_{A^{-1}} A = E$, где $P_i = T_i(E)$, где $T_i(E)$ представља трансформације на врстама. Дакле

$$A^{-1} = P_k \dots P_1 = T_k(E) \cdots T_1(E) = T_k \cdots T_1(E)$$

тј.

$$[A|E] \overset{T_1,\dots,T_k}{\longrightarrow} [E|A^{-1}]$$

**Пример 11.** Нека је $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Тражимо $A^{-1}$.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} / \cdot (-3) \\ \longleftarrow + \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} / \cdot (-\frac{1}{2}) \\ \longleftarrow + \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \begin{array}{l} \longleftarrow + \\ / \cdot (-2) \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Значи $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

# 4

# Детерминанте

**Дефиниција 4.1.** Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$ дата матрица. Тада је $\det A \in \mathbb{R}$ дефинисана са:

$$\det A = a_{11} \cdot \det \overline{A_{11}} - a_{21} \cdot \det \overline{A_{21}} + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot \det \overline{A_{n1}},$$

при чему је, за све $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, матрица $\overline{A_{i1}}$ добијена избацивањем $i$-те врсте и прве колоне матрице А. Тај број зовемо **минор**. Број $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det \overline{A_{ij}}$ зовемо **алгебарски кофактор** посматраног елемента матрице. Онда детерминанта може алтернативно да се запише и овако:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1}$$

Ознака: $\det\big[\cdots\big] = \big|\cdots\big|$

**Дефиниција 4.2.** Матрица $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ код које је $a_{ij} = 0$ за све $i > j$ зове се *горње троугаона*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ је горње троугаона матрица.}$$

Сваку матрицу елементарним трансформацијама на врстама можемо да сведемо на горње троугаону.

**Важно:** Детерминанту можемо посматрати као функцију врста.

**Краћи запис**: Нека је $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1\to} \\ A_{2\to} \\ \vdots \\ A_{n\to} \end{bmatrix} \in (\mathbb{R}^n)^n$. Означимо са $a_i = A_{i\to}$. Онда можемо да детерминанту:

$$\det \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \text{ запишемо и водоравно: } \det(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

**Теорема 4.1.** (Основна својства детерминанте)
Функција $\det : (\mathbb{R}^n)^n \longrightarrow \mathbb{R}$ има следећа својства као функција $n$ променљивих врста:

1. адитивност по сваком аргументу $a_k, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ :
$\det(a_1, \cdots, \underset{a_k}{b + c}, \cdots, a_n) = \det(a_1, \cdots, \underset{k}{b}, \cdots, a_n) + \det(a_1, \cdots, \underset{k}{c}, \cdots, a_n)$

2. хомогеност по сваком аргументу $a_k, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ :
$\det(a_1, \cdots, \underset{k}{\alpha b}, \cdots, a_n) = \alpha \det(a_1, \cdots, \underset{k}{b}, \cdots, a_n)$

3. антисиметричност:
$\det(a_1, \cdots, \underset{k}{a_l}, \cdots, \underset{l}{a_k}, \cdots, a_n) = -\det(a_1, \cdots, \underset{k}{a_k}, \cdots, \underset{l}{a_l}, \cdots, a_n)$

4. нормалност:
$$\det E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

*Доказ.* Својства адитивности и хомогености можемо да обједнинимо у једно својство (зовемо га линеарност):

$$\det(a_1, \cdots, \underset{a_k}{\alpha b + \beta c}, \cdots, a_n) = \alpha \det(a_1, \cdots, \underset{k}{b}, \cdots, a_n) + \beta \det(a_1, \cdots, \underset{k}{c}, \cdots, a_n)$$

За $\alpha = \beta = 1$ је адитивност, док за $\beta = 0$ је хомогеност. Ако је фунцкија адитивна и хомогена, онда је она линеарна.
Својство линеарности и антисиметричности доказујемо индукцијом по $n$:

1. Линеарност:
(**База индукције**) За $n = 1$ је тврђење тривијално јер функција $\det : (\mathbb{R}^n)^n \longrightarrow \mathbb{R}$ идентично пресликавање са само једним аргументом.
(**Индуктивна хипотеза**) Претпоставимо да за произвољно $n - 1$ тврђење важи.
(**Индуктивни корак**) Нека су матрице: $A = (a_1, \cdots, \underset{a_k}{\alpha b + \beta c}, \cdots, a_n)$, $B = (\underset{b_1}{a_1}, \cdots, \underset{b_k}{b}, \cdots, \underset{b_n}{a_n})$ и $C = (\underset{c_1}{a_1}, \cdots, \underset{c_k}{c}, \cdots, \underset{c_n}{a_n})$. Доказујемо: $\det A = \alpha \det B + \beta \det C$.
Развијмо детерминанту матрице $A$, и издвојимо $k$-ту врсту:

$$\det A = \sum_{i \neq k} a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{k1} A_{k1}, i \neq k$$

Алгебарски кофактори $A_{i1}, i \neq k$ садрже $k$-ту врсту матрице $A$ без њеног првог елемента, па је:

$$A_{i1} = (-1)^{i+1} \cdot \det \overline{A_{i1}} \overset{\text{и.х.}}{=} (-1)^{i+1} [\alpha \det \overline{B_{i1}} + \beta \det \overline{C_{i1}}] = \alpha B_{i1} + \beta C_{i1}$$

док кофактор $A_{k1}$ уопште не садржи $k$-ту врсту, па је:

$$A_{k1} = (-1)^{k+1} \cdot \det \underbrace{\overline{A_{k1}}}_{\overline{B_{k1}} = \overline{C_{k1}}} = (-1)^{k+1} \det \overline{B_{k1}} = (-1)^{k+1} \det \overline{C_{k1}}$$

одакле следи да је $A_{k1} = B_{k1} = C_{k1}$ (матрице $A$,$B$ и $C$ се разликују само у $k$-тој врсти). Сада је:

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{i\neq k} a_{i1}(\alpha B_{i1} + \beta C_{i1}) + (\alpha b_{k1} + \beta c_{k1})A_{k1}\\ &= \alpha\,\underbrace{(\sum_{i\neq k} a_{i1}B_{i1} + b_{k1}B_{k1})}_{\det B} + \beta\,\underbrace{(\sum_{i\neq k} a_{i1}C_{i1} + c_{k1}C_{k1})}_{\det C}\\ &= \alpha \det B + \beta \det C\end{aligned}$$

2. Антисиметричност: Доказујемо: $\det A = -\det B$
(**База индукције**) Исто важи као и за прошлу базу индукције (за линеарност) за $n = 1$.
(**Индуктивна хипотеза**) Претпоставимо да за произвољно $n-1$ тврђење важи.
(**Индуктивни корак**) Прво ћемо доказати да тврђење важи за суседне елементе. Претпоставимо да је $l = k+1$. Нека су матрице:
$A = (a_1, \cdots, a_k, a_{k+1}, \cdots, a_n)$
$B = (\underset{b1}{a_1}, \cdots, \underset{b_k}{a_{k+1}}, \underset{b_{k+1}}{a_k}, \cdots, \underset{b_n}{a_n})$.
Развијмо детерминанту матрице $A$, и издвојимо $k$-ту и $k+1$ врсту:

$$\det A = \sum_{i\neq k,k+1} a_{i1}\cdot A_{i1} + a_{k1}A_{k1} + a_{k+1,1}A_{k+1,1}$$

Како кофактори $A_{i1}$ садрже $k$-ту и $k+1$ врсту, онда је:

$$A_{i1} = (-1)^{i+1}\cdot \det \overline{A_{i1}} \overset{\text{И.Х.}}{=} (-1)^{i+1}\cdot(-\det \overline{B_{i1}}) = -B_{i1}$$

За кофакторе $A_{k1}$ и $A_{k+1,1}$ важи:

$$\begin{aligned}A_{k1} = (-1)^{k+1}\cdot \det \underbrace{\overline{A_{k1}}}_{=\overline{B_{k+1,1}}} &= (-1)^{k+1}\cdot \det \overline{B_{k+1,1}}\\ &= -\underbrace{(-1)^{k+2}\cdot \det \overline{B_{k+1,1}}}_{B_{k+1,1}}\\ &= -B_{k+1,1}\end{aligned}$$

и

$$A_{k+1,1} = (-1)^{k+2}\cdot \det \underbrace{\overline{A_{k+1,1}}}_{=\overline{B_{k1}}} = -\underbrace{(-1)^{k+1}\cdot \det \overline{B_{k1}}}_{B_{k1}} = -B_{k1}$$

Сада је

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{i\neq k,k+1} \underbrace{a_{i1}}_{=b_{i1}} + \underbrace{a_{k1}}_{=b_{k+1,1}} \cdot(-B_{k+1,1}) + \underbrace{a_{k+1,1}}_{=b_{k1}}\cdot(-B_{k1})\\ &= -\sum_{i\neq k,k+1} b_{i1}\cdot B_{i1} - b_{k+1,1}\cdot B_{k+1,1} - b_{k1}\cdot B_{k1}\\ &= -\det B\end{aligned}$$

чиме је тврђење доказано за суседне $k$ и $l$. Ако су $k$ и $l$ произвољни (рецимо $k < l$), онда тада има $l-k$ пермутовања суседних врста да $k$-ту врсту доведемо на $l$-то место:

$$\underbrace{k \to k+1 \to k+2 \to \cdots \to l}_{l-k}$$

Тада је $l$-та врста на $(l-1)$-вом месту, па је потребно још $l-k-1$ пермутација суседних врста да $l$-ту врсту доведемо на место $k$. Значи, укупно $l-k+l-k+1 = 2(l-k)-1$ пермутација суседних врста матрице:

$$\begin{aligned}\det(a_1, \cdots, \underset{k}{a_l}, \cdots, \underset{l}{a_k}, \cdots, a_n) &= (-1)^{2(l-k)-1} \cdot \det(a_1, \cdots, \underset{k}{a_k}, \cdots, \underset{l}{a_l}, \cdots, a_n) \\ &= -\det(a_1, \cdots, \underset{k}{a_k}, \cdots, \underset{l}{a_l}, \cdots, a_n)\end{aligned}$$

3. Нормалност:

   E је горње троугаона $\implies \det E = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{\text{н пута}} = 1$

$\square$

Из предходног закључујемо:

$\det P_{ij}(A) = -detA$ и $\det R_i(\alpha)(A) = \alpha \det A$.

**Последица 2.** Последице основних особина детерминанте:

5. $$\det \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \leftarrow i \overset{\text{хомогеност}}{=} 0 \cdot \det \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \leftarrow i = 0$$

   Дакле, ако матрица има 0-врсту, онда је њена детерминанта 0.

6. $$\det \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{matrix} \overset{\text{антисиметрицност}}{=} -\det \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{matrix}$$

   Дакле, ако матрица има две исте врсте, онда је њена детерминанта 0.

$$7.\ \det\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j+\alpha a_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \overset{\text{линеарност}}{=} \det\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} + \underbrace{\alpha\det\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}}_{=0} = \det\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}$$

Из овога закључујемо да је $\det Q_{ij}(\alpha)(A) = \det A$.

**Теорема 4.2.** (Теорема о јединствености детерминанте)

Ако је $f : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ било која функција која је адитивна, хомогена и антисиметрична као функција врста матрице, онда је: $f(A) = \det A \cdot f(E)$.
Ако је $f$ и нормирана (тј. $f(E) = 1$) онда је $f(A) = \det A.(f \equiv \det)$

*Доказ.* Елементарним трансформацијама на врстама $\mathbb{I}$ и $\mathbb{III}$ матрицу A можемо да сведемо на троугаони облик T. Тада је $f(A) = (-T)^k \cdot f(T)$.
$f(A)$ је само пар пута (тј. $k$ пута) променила знак када се мењају места врстама (антисиметричност). Када се некој врсти дода друга помножена са коефицијентом не дешава се ништа (последица линеарности).

$\det A = (-1)^k \cdot \det T \overset{\text{својство 7}}{=} \underbrace{(-1)^k \cdot t_{11} \cdot t_{22} \cdot \ldots \cdot t_{nn}}_{\text{дијгаонала матрице T}}$

Применом својстава функције $f$ добијамо:

$f(T) = t_{11} \cdot t_{22} \cdot \ldots \cdot t_{nn} \cdot f(E)$

Према томе:

$$f(A) = (-1)^k \cdot \underbrace{f(T) = (-1)^k \cdot t_{11} \cdot t_{22} \cdot \ldots \cdot t_{nn}}_{\det A} \cdot f(E) = \det A \cdot f(E)$$ □

Дакле, детерминанта је јединствена функција квадратне матрице која је линеарна, антисиметрична и нормирана као функција врста.

**Тврђење 4.1.** (Развој детерминанте по произвољној колони):

Ако је $A \in M_n(\mathbb{R})$,за свако $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ следи:

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

*Доказ.* Дефинишимо матричну функцију: $f(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$ и покажемо да је она линеарна, антисиметрична и нормална као функција врста (докази су слични као докази у теореми 4.1), па је, на основу теореме о јединствености, $f(A) = detA$.
□

**Теорема 4.3.** (Бине-Кошијева теорема):

Ако су $A, B \in M_n(\mathbb{R})$,тада је:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

*Доказ.* Фиксирамо матрицу $B$ и уочимо функцију:

$$f(A) = \det(AB)$$

Та функција је линеарна и антисиметрична (јер је детерминанта линеарна и антисиметрична функција), па је по теореми о јединствености детерминанте $f(A) = \det A \cdot f(E)$. Сада је:

$$\det(A \cdot B) = f(A) = \det A \cdot f(E) = \det A \cdot \det(E \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

□

**Важно:** Детерминанту можемо да посматрамо и као функцију колона, и тада је она линеарна, антисиметрична и нормирана.

**Последица 3.** Ако $A \in M_n(\mathbb{R})$, тада $\det(A^T) = \det A$

*Доказ.* Нека је $f(A) = \det(A^T)$

Како је детерминанта линеарна, антисиметрична и нормирана функција колона, онда је $f$ линеарна, антисиметрична и нормирана, па на основу теореме о јединствености детерминанте следи да је $f(A) = \det A$, па је $\det(A^T) = \det A$. □

Дакле, матрицу $A \in M_n(\mathbb{R})$ можемо развијати и по произвољној $i$-тој врсти:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

Генерално, све што важи за детерминанте и врсте, важи и за детерминанте и колоне. (То произилази из својстава детерминанте, теореме о јединствености и развојима)

**Пример 12.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{2+1} \cdot 2 + 4 \cdot (-1)^{2+2} \cdot 1 = -6 + 4 = -2$
(Развој по 2. врсти)

**Пример 13.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$-3 + 12 - 9 = 0$ (Развој по 1. врсти)

**Тврђење 4.2.** Нека је $A \in M_r(\mathbb{R})$. Експлицитна формула за рачунање детерминанте матрице $A$ је:

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} sgn\pi \cdot a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\pi(n)}$$

где је $S_n$ скуп свих пермутација скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ и $sgn\pi \in \{1, -1\}$ знак пермутације $\pi$.

*Доказ.* Дефинишимо функцију:

$$f(A) = \sum_{\pi \in S_n} sgn\pi \cdot a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\pi(n)}$$

Она је линеарна, антисиметрична и хомогена, па по теореми о јединствености детерминанте је

$$\det A = f(A) = \sum_{\pi \in S_n} sgn\pi \cdot a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\pi(n)}$$

□

Пермутација скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ једнака је бијекцији скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ (има их $n!$). На пример, $\pi(1) = 2, \pi(2) = 3, \pi(3) = 1, \pi(4) = 4$ је једна пермутација скупа $\{1, 2, 3, 4\}$

$$\pi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ако је $i < j$, а $\pi(i) > \pi(j)$ пар $(\pi(i), \pi(j))$ чини **инверзију** у пермутацији $\pi$.

Пермутација $\pi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ има две инверзије:

$(\underbrace{2}_{=\pi(1)}, \underbrace{1}_{=\pi(3)}), \pi(3) > \pi(1)$ и $1 < 3$, и

$(\underbrace{3}_{=\pi(2)}, \underbrace{1}_{=\pi(3)}), \pi(2) > \pi(3)$ и $2 < 3$,

# 4.1 Примене детерминанте

## 4.1.1 Адјунгована матрица и инверз

**Дефиниција 4.3.** Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$. Адјунгована матрица матрице $A$ је матрица која се добије када се транспонује матрица направљена од кофактора матрице $A$:

$$adjA := \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

**Пример 14.** Нека је $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4$
$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3$
$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2$
$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1$

$$adjA = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

**Теорема 4.4.** Нека $A \in M_n(\mathbb{R})$.

$$A \cdot adjA = detA \cdot E.$$

*Доказ.* Имамо следеће:

$$A \cdot adjA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$(A \cdot adjA)_{11} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \det A$

$(A \cdot adjA)_{12} = a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \ldots + a_{1n}A_{2n} = \det A$

$(A \cdot adjA)_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = \det A$

$$0 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{matrix} \text{, развијамо по } j\text{-тој врсти.}$$

$\implies a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0$ за $j \neq i$.

Дакле, $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} 0 & , i \neq j \\ \det & , i = j \end{cases}$

$$A \cdot adjA = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{bmatrix} = \det A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = A \cdot E$$ □

**Теорема 4.5.** $A \in M_n(\mathbb{R})$ је инвертибилна ако и само ако $\det A \neq 0$. У том случају је:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adjA.$$

*Доказ.* ($\Longrightarrow$) Нека је A инвертибилна $\implies$ постоји $B \in M_n(\mathbb{R})$ такво да је $A \cdot B = E$

Према Бине-Кошијевој теореми: $\det(AB) = \det A \cdot \det B = \det E = 1$

$\det A \cdot \det B = 1$

$\implies \det A \neq 0$

Још важи и: $\det B = \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

($\Longleftarrow$) нека je $\det A \neq 0$

$A \cdot adjA = \det A \cdot E \ / \cdot \frac{1}{\det A}$

$A \cdot \underbrace{\frac{1}{\det A} \cdot adjA}_{=A^{-1}} = E \implies$ A je инвертибилна и $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adjA$ $\square$

### 4.1.2 Крамерово правило

Нека je дат квадратни систем: $\left.\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \cdots & a_{1n}x_n & = & b1 \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & \cdots & a_{2n}x_n & = & b2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & a_{n2}x_2 & \cdots & a_{nn}x_n & = & bn \end{array}\right\} (*)$

Записујемо га као $AX = b$, где $A \in M_n(\mathbb{R})$, $b = \begin{bmatrix} b1 \\ b2 \\ \vdots \\ bn \end{bmatrix} \in M_{n1}(\mathbb{R})$ и

$X = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ \vdots \\ xn \end{bmatrix}$ je колона непознатих.

Означимо са: $\Delta = \det A$

$\Delta_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ je детерминанта матрице која се добија када се у $i$-ту колону матрице A замени колона $b$.

**Теорема 4.6.** Крамерово правило

1. Систем $(*)$ има јединствено решење ако и само ако $\Delta \neq 0$.
2. Ако je $\Delta = 0$ и бар једно $\Delta_i \neq 0$, тада систем (*) нема решење.

*Доказ.* Нека je систем:.

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \cdots & a_{1n}x_n & = & b1/ \cdot A_{1j} \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & \cdots & a_{2n}x_n & = & b2/ \cdot A_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & a_{n2}x_2 & \cdots & a_{nn}x_n & = & bn/ \cdot A_{nj} \end{array}$$

Ако саберемо помножене једначине, добијемо:

$$\underbrace{(\sum_i a_{i1} \cdot A_{ij})}_{=0} x_1 + \ldots \ + \underbrace{(\sum_i a_{i1} \cdot A_{ij})}_{=\Delta} x_j + \underbrace{(\sum_i a_{in} \cdot A_{ij})}_{=0} x_n = \underbrace{\sum_i b_i \cdot A_{ij}}_{\Delta j}$$

$$\underbrace{\sum_i b_i \cdot A_{ij}}_{\Delta j} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta j, \text{где је } \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} j\text{–та колона}$$

$$\sum_i a_{ij} A_{ij} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{развој по j-тој колони}}}{=} \det A$$

$$\sum_i a_{ik} \cdot A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \text{ где је к било који број из скупа } \{1, 2, \dots, n\} n \{j\}.$$

Дакле, $\Delta \cdot x_j = \Delta j$ за све $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Добијамо нови систем:

$$\left.\begin{array}{rcl} 0 \cdot x_1 & = & \Delta_1 \\ 0 \cdot x_2 & = & \Delta_1 \\ & \vdots & \\ 0 \cdot x_n & = & \Delta_n \end{array}\right\} (**)$$

Сада имамо два случаја:

1. $\Delta \neq 0$

   Тада је решење $(**)$: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$

   Проверавамо да ли је решење система $(**)$ решење и система $(*)$, проверавамо да ли је задовољена $i$-та једначина система $(*)$:

$$a_{i1} \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta} + a_{i2} \cdot \frac{\Delta_2}{\Delta} + \dots + a_{in} \cdot \frac{\Delta_n}{\Delta} = b_i S$$

   Провера:

$$\sum_j a_{ij} \cdot \frac{\Delta_j}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \sum_j a_{ij} \Delta_j$$
$$= \frac{1}{\Delta} \cdot \sum_j a_{ij} \cdot \left(\sum_k b_k \cdot A_{kj}\right)$$
$$= \frac{1}{\Delta} \cdot \sum_k b_k \cdot \sum_j a_{ij} \cdot A_{kj}$$
$$= \frac{1}{\Delta} \left( b_1 \cdot \underbrace{\sum_j a_{ij} A_{1j}}_{0} + \dots + b_i \underbrace{\sum_j a_{ij} A_{ij}}_{\Delta} + \dots + b_n \cdot \underbrace{\sum_j a_{ij} A_{nj}}_{0} \right)$$
$$= \frac{1}{\Delta} \cdot b_i \cdot \Delta = b_i \text{ јесте решење система } (*)$$

2. $\Delta = 0$

$$\left.\begin{array}{rcl} 0 \cdot x_1 & = & \Delta_1 \\ 0 \cdot x_2 & = & \Delta_1 \\ & \vdots & \\ 0 \cdot x_n & = & \Delta_n \end{array}\right\} = (**) \text{ ако је бар један од } \Delta_i \neq 0$$

$\Longrightarrow$ $(**)$ нема решење

$\Longrightarrow$ $(*)$ нема решење јер је $S(*) \subseteq \underbrace{S(**)}_{\emptyset}$

Ако је $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \cdots = \Delta_n = 0$ тада је $S(**) = \mathbb{R}^n$.

Међутим о $S(*)$ ништа не можемо рећи. Знамо да је $S(*) \subseteq \underbrace{S(**)}_{\mathbb{R}^{\ltimes}}$, али то не даје никакву информацију о $S(*)$. У овом случају, систем $(*)$ решавамо неком другом методом, на пример Гаусом.

$\square$

# 5

# Векторски простори

**Дефиниција 5.1.** Векторски простор над пољем $F$($F$ - векторски простор) представља скуп $V$ са једном бинарном операцијом $V \times V \longrightarrow V$(сабирање, $(v+u) \mapsto v+u$) и једном спољашњом операцијом $F \times V \longrightarrow V$(множење скаларом из поља $F$, $(\alpha, v) \mapsto \alpha \cdot v$) при чему си задовољене следеће особине:

A1 $(u + v) + \omega = u + (v + \omega)$

A2 $u + v = v + u$

A3 Постоји $0 \in V$ такав да је $0 + u = u + 0 = u$ за све $u \in V$

A4 За сваки $u \in V$ постоји $-u \in V$ такав да је $u + (-u) = (-u) + u = 0$

A5 $\alpha \cdot (u + v) = \alpha u + \alpha v$

A6 $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha u + \beta u$

A7 $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha \cdot \beta) \cdot u$

A8 $1 \cdot u = u$ где је 1 јединица из поља $F$

За све $u, v, \omega \in V$ и $\alpha, \beta \in F$.

Елементи из $V$ се зову *вектори*, а елементи из $F$ *скалари.* 0 из дефиниције означавамо још и са $0_v$ и зовемо нула вектором, док $-u$ зовемо супротним вектором вектора $u$. У наставку ће нам најчешће бити $F = \mathbb{R}$.

**Тврђење 5.1.** (Последице аксиома)
Нека је $V$ реалан векторски простор. Тада:

1. $\alpha \cdot (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \alpha u_1 + \alpha u_2 + \cdots + \alpha u_n$
2. $(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) \cdot u = \alpha_1 u + \alpha_2 u + \cdots + \alpha_n u$
3. $0 \cdot u = 0_v$ за све $u \in V$, где је 0 неутрал за сабирање у $\mathbb{R}$
4. $\alpha \cdot 0_v = 0_v$ за све $\alpha \in \mathbb{R}$
5. Ако је $\alpha \cdot u = 0_v$ онда је $\alpha = 0$ или $u = 0_v$

*Доказ.* Доказиваћемо редом.

1. Доказ преко математичке индукције.
   (**База индукције**) За $n = 1$ имамо:
   $$\alpha \cdot (u_1) = \alpha u_1$$
   што је тачно.
   (**Индуктивна хипотеза**) Претпоставимо да за неко $n \in \mathbb{R}$ једнакост важи.
   (**Индуктивни корак**) Сада имамо:
   $$\begin{aligned}\alpha \cdot (u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1}) &\overset{\text{A5}}{=} \alpha \cdot (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) + \alpha u \\ &\overset{\text{И.Х.}}{=} \alpha u_1 + \alpha u_2 + \cdots + \alpha u_n + \alpha u_{n+1}\end{aligned}$$
   Дакле, и за $n + 1$ једнакост важи, па цела једнакост важи.

2. Слично као под 1, применом индукције, само што ће у индуктивном кораку бити коришћена особина 6.

3. Важи $0 + 0 = 0$ јер је 0 неутрал у $\mathbb{R}$. Сада имамо:
   $$0 \cdot u = (0 + 0) \cdot u \overset{\text{A6}}{=} 0 \cdot u + 0 \cdot u$$
   Означимо са $v = 0 \cdot u \in V$. Дакле:
   $$\begin{aligned}&v = v + v \quad /+(-v) \\ &\underbrace{v + (-v)}_{\underset{A4}{=} 0_v} = (v + v) + (-v) \overset{A1}{=} v + (\underbrace{v + (-v)}_{\underset{A4}{=} 0_v}) \\ \Longrightarrow &0_v = v + 0_v \\ \Longrightarrow &v = 0_v \\ \Longrightarrow &0 \cdot u = 0_v\end{aligned}$$

4. Аналогно као под 3, али крећемо од $0_v + 0_v = 0_v$

5. Ако је $\alpha = 0$, онда је по особини 3 $0 \cdot u = 0_v$. Претпоставимо да је $\alpha \neq 0$ и $\alpha \cdot u = 0_v$. Пошто је $\alpha \neq 0$, то значи да постоји $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{R}$. Сада имамо:
   $$\begin{aligned}&\alpha \cdot u = 0_v \quad /\frac{1}{\alpha} \\ &\frac{1}{\alpha}(\alpha \cdot u) = \frac{1}{\alpha} \cdot 0_v \\ \overset{A7}{\Longrightarrow} &(\underbrace{\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha}_{=1}) \cdot u = \underbrace{\frac{1}{\alpha} \cdot 0_v}_{\underset{A4}{=} 0_v} \\ \Longrightarrow &1 \cdot u = 0_v \\ \overset{A8}{\Longrightarrow} &u = 0_v\end{aligned}$$
   чиме је тврђење доказано.

□

**Пример 15.** Неки примери векторских простора:

1. $V = \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$. Операције:
   $(x_1, \ldots x_n) + (y_1, \ldots, y_n) \coloneqq (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$
   $\alpha \cdot (x_1, \ldots, x_n) \coloneqq (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n), \alpha \in \mathbb{R}$.
   $V$ са дефинисаним операцијама је векторски простор. За $n = 2$ добијамо геометријске векторе. Нула вектор је: $0_v = \underbrace{(0, \ldots, 0)}_{n \text{ пута}}$, а супротан вектор: $-(x_1, \ldots, x_n) = (-x_1, \ldots, -x_n)$.

2. Полиноми са коефицијентима из поља $F$.
   $V = F[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n | a_i \in F, n \in \mathbb{N}\}$
   Операције су сабирање полинома и множење полинома елементима из $F$. Нула вектор је нула полином, док је супротан вектор сам по себи објашњив.

3. Матрице
   $V = M_{mn}(F)mn$. Операције:
   $A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$
   $\alpha A = \alpha[a_{ij}] = [\alpha a_{ij}], \alpha \in F$.
   Нула вектор је матрица $0_v = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$, док је супротан вектор $-A = [-a_{ij}]$.

4. Простор функција. Нека је $F$ поље и $S \neq \emptyset$ било који скуп.
   $V = F^S = \{f | f : S \longrightarrow F\}$. Операције:
   $(f + g)(x) \coloneqq f(x) + g(x)$ за све $x \in S$, и где је оператор $+$ у пољу $F$
   $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ за све $x \in S$, и где је оператор $\cdot$ у пољу $F$.
   $V$ је $F$-векторски простор. Нула вектор је нула-функција, док је супротан вектор: $(-f)(x) = -f(x)$.

## 5.1 Векторски потпростори

**Дефиниција 5.2.** Нека је $V$ векторски простор над $\mathbb{R}$ и $U \neq \emptyset$ подскуп скупа $V$. Скуп $U$ је векторски потпростор (или само потпростор) простора $V$ ако је и сам векторски простор у односу на операције из $V$. Означавамо са $U \leq V$.

**Тврђење 5.2.** Нека је $V$ векторски простор над $\mathbb{R}$ и $U \subseteq V, U \neq \emptyset$. Тада је $U$ потпростор од $V$ ако важе следећа два услова:

1. Ако $u_1, u_2 \in U$, онда важи $u_1 + u_2 \in U$ ($U$ је затворен за сабирање)

2. Ако $\alpha \in \mathbb{R}$ и $u \in U$, онда важи $\alpha \cdot u \in U$ ($U$ је затворен за множење скаларом)

*Доказ.* Доказујемо особине векторског простора редом. Особине А1, А2 и А5-А8 важе на целом скупу $V$, па и на његовом подскупу $U$. Дакле треба доказати да ли су испуњене особине А3 и А4.

А3: Из другог услова тврђења за $\alpha = 0 \Longrightarrow \underbrace{0 \cdot u}_{=0_v} \in U \Longrightarrow 0_v \in U$ ($u$ постоји јер је $U \neq \emptyset$).

A4: Из другог услова тврђења за $\alpha = -1 \Longrightarrow (-1)\cdot u \in U$. Да ли је $(-1)\cdot u = -u$? Имамо:

$$\begin{aligned}
&(-1)+1 = 0 \quad / \cdot u \\
&((-1)+1)\cdot u = \underbrace{0\cdot u}_{=0_v} \\
\overset{A6}{\Longrightarrow}&(-1)\cdot u + 1\cdot u = 0_v \\
\Longrightarrow&(-1)\cdot u + u = 0_v \\
\Longrightarrow& -u = (-1)\cdot u \Longrightarrow (-u) \in U
\end{aligned}$$

Дакле, $U \leq V$. □

**Последица 4.** Нека је $V$ векторски простор и $U \subseteq V, U \neq \emptyset$ његов подскуп. Тада важи:

$$U \leq V \Longleftrightarrow \alpha u_1 + \beta u_2 \in U$$

за све $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $u_1, u_2 \in U$.

*Доказ.* Ако важе услови 1. и 2. из тврђења 5.2, тада $\alpha u_1, \beta u_2 \in U$ (из услова 2.) па је $\alpha u_1 + \beta u_2 \in U$ (из услова 1.). Обрнуто, ако $\alpha u_1 + \beta u_2 \in U$, онда за $\alpha = \beta = 1$ добијамо услов 1., а за $\beta = 0$ добијамо услов 2. □

**Пример 16.** Неколико примера потпростора:

1. За $V = \mathbb{R}^n$, скуп решења хомогеног система (са $n$ непознатих) $S$ чини његов потпростор: Нека су $u,v \in S$ где је $u = (u_1, \ldots, u_n)$ и $v = (v_1, \ldots, v_n)$.
Важи $A \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ и $A \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ или скраћено $Au = 0$ и $Av = 0$. Нека су $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
$A(\alpha u + \beta v) = A \cdot \begin{bmatrix} \alpha u_1 + \beta v_1 \\ \vdots \\ \alpha u_n + \beta v_n \end{bmatrix} = \alpha \cdot \underbrace{Au}_{=0} + \beta \cdot \underbrace{Av}_{=0} = 0$ одакле следи да $\alpha u + \beta v \in S$.
Решење нехомогеног система **не** чини потпростор од $\mathbb{R}^n$ (скуп решења не садржи $0_v = (0, \ldots, 0)$). Решење нехомогеног система је једнако решењу одговарајућег хомогеног заједно са неким вектором.
Потпростори у $\mathbb{R}^2$ : $\underbrace{\{0_v\}}_{=(0,0)}, \mathbb{R}^2$ (ови потпростори се зову *тривијални* потпростори),
$p = \{(x,y) | \alpha x + \beta y = 0\}$ - праве које пролазе кроз координатни почетак.
Потпростори у $\mathbb{R}^3$ : $\underbrace{\{0_v\}}_{=(0,0,0)}, \mathbb{R}^3$ (тривијални потпростори),
равни које садрже тачку $(0,0,0) : Ax + By + Cz = 0$,
праве које пролазе кроз $(0,0,0)$ (пресек две равни)

2. За $V = M_{mn}(\mathbb{R})$, неки потпростори су:
$GT_n(\mathbb{R}) = \{ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} | a_{ij} \in \mathbb{R}\}$

$$DT_n(\mathbb{R}) = \{ \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} | \Game\beth\gimel \in \mathbb{R} \}$$

$$D_n(\mathbb{R}) = \{ \begin{bmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{bmatrix} | \alpha_i \in \mathbb{R} \}$$

$S_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | A^T = A\}$ - скуп симетричних матрица

**Теорема 5.1.** Ако су $U$ и $W$ потпростори векторског простора $V$, онда је и њихов пресек такође потпростор од $V$.

*Доказ.* Нека су вектори $u, v \in U \cap W$ и нека $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Доказујемо да $\alpha u + \beta v \in U \cap W$. Из $u \in U \cap W$ имамо да $u \in U$ и $u \in W$. Такође из $v \in U \cap W$ имамо да $v \in U$ и $v \in W$. Одавде следи да $\alpha u + \beta v \in U$ и $\alpha u + \beta v \in W$, па важи и $\alpha u + \beta v \in U \cap W$. □

**Важно:** Унија потпростора **не мора** бити увек бити потпростор.

**Дефиниција 5.3.** Сума два потпростора $U$ и $W$ векторског простора $V$ се дефинише као:

$$U + W = \{u + \omega | u \in U, \omega \in W\}$$

Важи: $U \subseteq U + W$ и $W \subseteq U + W$.

**Теорема 5.2.** Ако су $U$ и $W$ потпростори векторског простора $V$, онда је и њихова сума потпростор од $V$.

*Доказ.* Нека су вектори $v_1, v_2 \in U + W$. Онда је $v_1 = u_1 + \omega_1$, за неке $u_1 \in U, \omega_1 \in W$ и $v_2 = u_2 + \omega_2$, за неке $u_2 \in U, \omega_2 \in W$. Сада, за неке $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имамо:

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha(u_1 + \omega_1) + \beta(u_2 + \omega_2) = \underbrace{(\alpha u_1 + \beta \omega_1)}_{\in U} + \underbrace{(\alpha u_2 + \beta \omega_2)}_{\in W} \in U + W$$

□

**Тврђење 5.3.** Нека је $v \in U + W$ дато као $v = u + \omega$ за неке $u \in U$ и $\omega \in W$. Овај приказ је јединствен ако и само ако је $U \cap W = \{0_v\}$.

*Доказ.* ($\Longrightarrow$) Нека је приказ јединствен. Онда доказујемо да је $U \cap W = \{0_v\}$. Претпоставимо супротно, тј. да $U \cap W \neq \{0_v\}$. Онда постоји $v \in (U \cap W) \setminus \{0_v\}$\$ тако да је:

$$0_v = \underbrace{v}_{\in U} + \underbrace{(-v)}_{\in W} = \underbrace{0_v}_{\in U} + \underbrace{0_v}_{\in W}$$

Дакле, приказ није јединствен, што је контрадикција, па нам претпоставка није тачна. Одавде следи да је $U \cap W = \{0_v\}$.

($\Longleftarrow$) Нека је $U \cap W = \{0_v\}$. Доказујемо да је приказ јединствен. Претпоставимо супротно, тј. нека постоје $u_1, u_2 \in U$ и $\omega_1, \omega_2 \in W$ такви да је $u_1 + \omega_1 = u_2 + \omega_2$. Нека је $x = u_1 - u_2 = \omega_2 - \omega_1$. Одавде следи да $x \in U \cap W$, па је $u_1 - u_2 = 0_v$ и $\omega_2 - \omega_1 = 0_v$ односно $u_1 = u_2$ и $\omega_2 = \omega_1$, што је контрадикција са претпоставком. Значи, приказ је јединствен. □

**Дефиниција 5.4.** За суму $U + W$ потпростора $U$ и $W$ кажемо да је **директна**, и пишемо $U \oplus W$, ако је $U \cap W = \{0_v\}$.

**Пример 17.** Пар примера:

1. За $U = \{(x,0)|x \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}^2$ и $W = \{(0,y)|y \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}^2$ важи да је $U + W = U \oplus W$, јер је $U \cap W = \{0_v\}$.

2. За $GT_2(\mathbb{R}) = \{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} |a,b,c \in \mathbb{R}\}$ и $DT_2(\mathbb{R}) = \{\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} |a,b,c \in \mathbb{R}\}$ је $GT_2(\mathbb{R}) + DT_2(\mathbb{R}) \neq GT_2(\mathbb{R}) \oplus DT_2(\mathbb{R})$. Нпр.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}_{\in GT_2(\mathbb{R})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}}_{\in DT_2(\mathbb{R})} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\in GT_2(\mathbb{R})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}_{\in DT_2(\mathbb{R})}$$

## 5.2 Линеарна комбинација, генератриса

**Дефиниција 5.5.** Нека је $V$ векторски простор над пољем $F$. За произвољне векторе $u_1, u_2, \ldots, u_n \in V$ и произвољне скаларе $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$ кажемо да је вектор $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$ *линеарна комбинација* (или прецизније линеарна комбинација над пољем $F$, $F$ - линеарна комбинација) вектора $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

**Дефиниција 5.6.** Нека је $V$ векторски простор над пољем $F$ и нека је $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subseteq V$ коначан подскуп. *Линеарни омотач (линеал)* скупа $S$ (у ознаци $\mathcal{L}(\mathcal{S})$) је скуп свих линеарних комбинација вектора из $S$, тј.

$$\mathcal{L}(\mathcal{S}) \coloneqq \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n | \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F\}$$

**Тврђење 5.4.** Нека је $V$ векторски простор над пољем $\mathbb{R}$ и нека је $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subseteq V$ коначан подскуп. Важи да је $\mathcal{L}(\mathcal{S}) \leq V$.

*Доказ.* Нека су $u, v \in \mathcal{L}(S)$. Онда је $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$ и $v = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_n u_n$, за $a_i, \beta_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, \ldots, n\}$. Важи:
$u + v = \underbrace{(\alpha_1 + \beta_1)}_{\in\mathbb{R}} u_1 + \underbrace{(\alpha_2 + \beta_2)}_{\in\mathbb{R}} u_2 + \cdots + \underbrace{(\alpha_n + \beta_n)}_{\in\mathbb{R}} u_n \in \mathcal{L}(S)$ и за $\alpha \in \mathbb{R}$
$\alpha u = \underbrace{(\alpha \cdot \alpha_1)}_{\in\mathbb{R}} u_1 + \underbrace{(\alpha \cdot \alpha_2)}_{\in\mathbb{R}} u_2 + \cdots + \underbrace{(\alpha \cdot \alpha_n)}_{\in\mathbb{R}} u_n \in \mathcal{L}(S)$
Дакле, $\mathcal{L}(S) \leq V$. □

Ако је $S$ скуп вектора векторског простора $V$, онда је $\mathcal{L}(S)$ најмањи потпростор који садржи $S$ (тј. $S \subseteq \mathcal{L}(S)$).

**Тврђење 5.5.** Ако је $S$ скуп вектора из векторског простора $V$ над пољем $\mathbb{R}$, онда је $S = \mathcal{L}(S)$ ако и само ако је $S \leq V$.

*Доказ.* ($\Longrightarrow$) Ако је $S = \mathcal{L}(S)$, а из претходног тврђења важи да је $\mathcal{L}(S) \leq V$, онда је $S \leq V$.
($\Longleftarrow$) Нека је $S \leq V$. Ово значи да свака линеарна комбинација елемената из $S$ остаје у $S$, тј. $\mathcal{L}(S) \subseteq S$. Међутим, увек важи да је $S \subseteq \mathcal{L}(S)$. Дакле, $S = \mathcal{L}(S)$. □

**Напомена:** Ако је $S$ бесконачан скуп, онда узимамо линеарне комбинације коначно много вектора из $S$:

$$\mathcal{L}(S) = \{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n | n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ где је } i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

**Тврђење 5.6.** Важи ($S$ и $T$ су скупови вектора из векторског простора $V$):

1. $\mathcal{L}(S \cup T) = \mathcal{L}(S) \cup \mathcal{L}(T)$
2. $\mathcal{L}(\mathcal{L}(S)) = \mathcal{L}(S)$
3. $S \subseteq T \Longrightarrow \mathcal{L}(S) \leq \mathcal{L}(T)$

**Дефиниција 5.7.** За скуп $S$, који је скуп вектора векторског простора $V$ над пољем $\mathbb{R}$, кажемо да је *генератриса* векторског простора $V$ ако је $\mathcal{L}(S) = V$.

**Пример 18.** Неколико примера:

1. Нека је дат вектор $u = (1,2,3) \in \mathbb{R}^3$ и скуп $S = \{u\}$. Онда је $\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(u) = \{\alpha \cdot (1,2,3) | \alpha \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}^3$ (што је права). Међутим $\mathcal{L}(u) \neq \mathbb{R}^3$, па одатле следи да $S$ није генератриса од $\mathbb{R}^3$.
2. Ако узмемо скуп $\mathbb{R}[x]$ и скуп $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$, скуп $S$ јесте генератриса од $R[x]$ јер је $\mathcal{L}(S) = \{a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_n \cdot x^n | a_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, \ldots, n\}\} = \mathbb{R}[x]$
3. Ако узмемо скуп $M_2(\mathbb{R})$ и матрице $E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, скуп $S = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ чини генератрису од $M_2(\mathbb{R})$ јер је
$\mathcal{L}(S) = \{\begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} = a \cdot E_{11} + b \cdot E_{12} + c \cdot E_{21} + d \cdot E_{22} | a, b, c, d \in \mathbb{R}\} = M_2(\mathbb{R})$

**Дефиниција 5.8.** Скуп $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ је линеарно независан скуп вектора из векторског простора $V$ над пољем $\mathbb{R}$ уколико важи да, ако је $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = 0_v$, где је $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, онда мора да важи $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$

**Пример 19.** Неколико примера:

1. Ако је $0_v \in S$, онда скуп $S$ није линеарно независан (нпр $1 \cdot 0_v = 0_v$).
2. Скуп $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ је линеарно независан скуп. Ако је $a_0 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot x + \ldots + \alpha_n \cdot x^n = 0_v$ онда мора да важи $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$
3. Вектори $(1,2)$ и $(5,10)$ из $\mathbb{R}^2$ су линеарно зависини:
$$5 \cdot (1,2) + (-1) \cdot (5,10) = (0,0) = 0_v$$
док су вектори $(1,2)$ и $(1,3)$ линеарно независни:
$$\alpha(1,2) + \beta(1,3) = 0_v = (0,0) \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$$

**Лема 5.1.** Систем $e = [e_1, \ldots, e_n]$ је линеарно зависан систем вектора из векторског простора $V$ ако и само ако неки вектор $e_i, i \in \{1, \ldots n\}$ можемо изразити преко других.

*Доказ.* ($\Longrightarrow$) Нека је $e$ линеарно зависан систем вектора. Одавде следи да је $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = 0_v$ и постоји $\alpha_i \neq 0, i \in \{1, \ldots, n\}$. Сада имамо:
$$\begin{aligned} &\frac{\alpha_1}{\alpha_n} e_1 + \ldots + \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} e_{i-1} + e_i + \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} e_{i+1} + \ldots + \frac{\alpha_n}{\alpha_i} e_n = 0_v \\ \Longrightarrow & e_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} e_1 - \ldots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} e_{i-1} - e_i - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} e_{i+1} - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} e_n \\ \Longrightarrow & e_i \in \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n) \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Нека је $e_i = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_{i-1}e_{i-1} + \alpha_{i+1}e_{i+1} + \ldots + \alpha_n e_n$ из скупа $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Одавде следи да је $e_i = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_{i-1}e_{i-1} + (-1)\cdot e_i + \alpha_{i+1}e_{i+1} + \ldots + \alpha_n e_n = 0_v$, одакле следи да је $e$ линеарно зависан систем. □

**Лема 5.2.** Систем $e = [e_1, \ldots, e_n]$ је линеарно независан систем вектора из векторског простора $V$ ако и само ако је представљање било ког вектора као линеарне комбинације вектора из $S$ једнозначно.

*Доказ.* ($\Longrightarrow$) Нека је $e$ линеарно независан систем. Нека је

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n$$

Одавде следи да је:

$$(\alpha_1 - \beta_1)e_1 + (\alpha_2 - \beta_2)e_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)e_n = 0_v$$

Сад, како је $e$ линеарно независан систем, онда је $\alpha_i - \beta_i = 0$ тј. $\alpha_i = \beta_i$ за $i = \{1, \ldots, n\}$
($\Longleftarrow$) Нека је представљање вектора као линеарне комбинације из $e$ једнозначно. Онда ако је:

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = 0_v$$

и пошто је приказ једнозначан, онда је

$$0\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + \ldots + 0\cdot e_n = 0_v$$

одакле следи да је $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$, тј. $e$ је линеарно независан систем. □

**Теорема 5.3.** Нека је $V$ векторски простор над пољем $\mathbb{R}$ и $e = [e_1, \ldots, e_n]$ систем вектора из $V$. Следећа тврђења су еквивалентна:

1. $e$ је линеарно независан и генератриса од $V$
2. $e$ је минимална генератриса од $V$
3. $e$ је максималан линеарно независан систем

*Доказ.* Доказујемо ланац импликација: 2) $\Longrightarrow$ 1) $\Longrightarrow$ 3) $\Longrightarrow$ 2)

2) $\Longrightarrow$ 1) Дато је да је $e$ минимална генератриса, па самим тим је и генератриса. Треба показати да је $e$ линеарно независан. Претпоставимо супротно, нека је $e$ линеарно зависан систем. Онда, по леми 5.1, постоји $e_i \in e$ тако да $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e \setminus \{e_i\})$. Како је $\mathcal{L}(e) = V$ одатле следи да је и $\mathcal{L}(e \setminus \{e_i\}) = V$, па је $e \setminus \{e_i\}$ генератриса од $V$, што је у контрадикцији са датим условом ($e \setminus \{e_i\}$ је мања генератриса од $e$). Значи, $e$ је линеарно независан систем.

1) $\Longrightarrow$ 3) Дато је да је $e$ линеарно независан и генератриса. Треба показати да је $e$ максималан линеарно независан систем. Ако бисмо додали систему $e$ још један вектор $u \notin e$, тада $u \in V = \mathcal{L}(e)$, па по леми 5.1 $e \cup \{u\}$ је линеарно зависан, што је у контрадикцији са датим условом. Значи, $e$ је максималан линеарно независан систем.

3) $\Longrightarrow$ 2) Дато је да је $e$ максималан линеарно независан систем. Покажимо прво да је $e$ генератриса од $V$. Претпоставимо супротно, тј. нека постоји $u \in V$ тако да $u \notin \mathcal{L}(e)$. Ако је $\alpha u + \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = 0_v$ тада је $\alpha = 0$ јер $u \notin \mathcal{L}(e)$ (у супротном би $u$ могао бити изражен као линеарна комбинација вектора из $e$, тј. $u \in \mathcal{L}(e)$). Одавде следи да је $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = 0_v$, па важи, пошто је $e$ линеарно независан систем, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Дакле, $e \cup \{u\}$ је линеарно

независан систем, што је контрадикција са датим условом (јер је $e$ максималан линеарно независан систем).
Потребно је још доказати да је $e$ минимална генератриса. Претпоставимо супротно, тј. нека је $\mathcal{L}(e \setminus \{e_i\}) = V$. Како је и $\mathcal{L}(e) = V$ одатле следи да је $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(e \setminus \{e_i\})$, па, по леми 5.1, следи да је $e$ линеарно зависан, што је контрадикција. Дакле, $e$ је минимална генератриса од $V$. □

**Дефиниција 5.9.** За систем вектора $e$ из векторског простора $V$ над пољем $\mathbb{R}$ који је линеарно независан и генератриса од $V$ кажемо да је **база** векторског простора $V$.

**Коментар:** Ако је $e$ база векторског простора $V$, онда се сваки вектор на јединствен начин може представити као линеарна комбинација вектора из $e$.

**Пример 20.** Неколико примера база:

1. За $V = \mathbb{R}^n$, његова база је $e = [e_1, \ldots, e_n]$ где су:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \ldots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, \ldots, 0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, \ldots, 1) \end{aligned}$$

2. За $V = M_{mn}(\mathbb{R})$, његова база је $e = [E_{ij}]$, где је $E_{ij} \in M_{mn}(\mathbb{R})$ матрица димензије $m \times n$ којој су сви елемнти 0 сем на позицији $(i, j)$ где је 1 (нека читалац проба сам да докаже да је систем $e$ база).

**Лема 5.3.** Ако је $f = [f_1, \ldots, f_m]$ линеарно независан систем и $f \subseteq \mathcal{L}(e)$, где је $e = [e_1, \ldots, e_n]$, онда је $m \leq n$.

*Доказ.* Доказујемо индукцијом по $n$.
(**База индукције**) Нека је $n = 1$. Онда је $e = [e_1]$ и $f \subseteq \mathcal{L}(e_1)$. Ако би $m \geq 2$ онда постоје два вектора $f_1, f_2$ из система $f$ за које важи

$$\begin{aligned} f_1 &= \alpha_1 e_1 \\ f_2 &= \alpha_2 e_2 \end{aligned}$$

где су $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ (јер је $f$ линеарно независан систем). Из прве једнакости је $e_1 = \frac{1}{\alpha_1} f_1$, па је $f_2 = \alpha_2 \cdot \frac{1}{\alpha_1} f_1$, па је $f$ линеарно зависан. Значи, $m \leq 1$.

(**Индуктивна хипотеза**) Нека тврђење важи за све системе $e$ са мање од $n > 1$ вектора.
(**Индуктивни корак**) Нека је $e = [e_1, \ldots, e_n]$ и $f = [f_1, \ldots, f_m]$. Сада је:

$$\begin{aligned} f_1 &= \alpha_{11} e_1 + \alpha_{12} e_2 + \ldots + \alpha_{1n} e_n \\ f_2 &= \alpha_{21} e_1 + \alpha_{22} e_2 + \ldots + \alpha_{2n} e_n \\ &\vdots \\ f_m &= \alpha_{m1} e_1 + \alpha_{m2} e_2 + \ldots + \alpha_{mn} e_n \end{aligned}$$

Сада, $f_1 \neq 0_v$ (јер $0_v$ не може бити у линеарно независном систему), па је $\alpha_{ij} \neq 0$ за неко $j \in \{1, \ldots, n\}$. Без умањења општости, ако узмемо $\alpha_{1n}$ и средимо систем:

$$\begin{aligned}
f_1 &= \alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2 + \ldots + \alpha_{1n}e_n \quad / \cdot (-\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}) \quad \ldots \quad / \cdot (-\frac{\alpha_{m1}}{\alpha_{11}}) \\
f_2 &= \alpha_{21}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \ldots + \alpha_{2n}e_n \quad + \\
&\vdots \\
f_m &= \alpha_{m1}e_1 + \alpha_{m2}e_2 + \ldots + \alpha_{mn}e_n \quad +
\end{aligned}$$

добијемо следеће:

$$\begin{aligned}
f_1 &= \alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2 + \ldots + \alpha_{1n}e_n \\
f_2 - \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}f_1 &= (\alpha_{22} - \frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{\alpha_{11}})e_2 + (\alpha_{23} - \frac{\alpha_{13}\alpha_{21}}{\alpha_{11}})e_3 + \ldots + (\alpha_{2n} - \frac{\alpha_{1n}\alpha_{21}}{\alpha_{11}})e_n \\
&\vdots \\
f_m - \frac{\alpha_{m1}}{\alpha_{11}}f_1 &= (\alpha_{m2} - \frac{\alpha_{12}\alpha_{m1}}{\alpha_{11}})e_2 + (\alpha_{m3} - \frac{\alpha_{13}\alpha_{m1}}{\alpha_{11}})e_3 + \ldots + (\alpha_{mn} - \frac{\alpha_{1n}\alpha_{m1}}{\alpha_{11}})e_n
\end{aligned}$$

Сада, означимо са $f_2' = f_2 - \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}f_1, \ldots, f_m' = f_m - \frac{\alpha_{m1}}{\alpha_{11}}f_1$. Систем $f' = [f_2', \ldots, f_m']$ је линеарно независан. Такође имамо и да је $f_i' \in \mathcal{L}(e_2, \ldots, e_n)$, па, по индуктивној хипотези, следи да је $m - 1 \leq n - 1$, тј. $m \leq n$. $\square$

**Теорема 5.4.** Ако су $e$ и $f$ базе векторског простора $V$, онда је $|e| = |f|$ ($|e|$ означава број вектора у систему $e$).

*Доказ.* Пошто је $e$ линеарно независан систем и $f$ генератриса, следи да је $e \subseteq \mathcal{L}(f)$ па по леми 5.3 је $|e| \leq |f|$. Слично, $f$ је линеарно независан систем и $e$ је генератриса, па је $f \subseteq \mathcal{L}(e)$, па је по леми 5.3 $|f| \leq |e|$. Значи, $|e| = |f|$. $\square$

**Дефиниција 5.10.** Нека је $V$ векторски простор над $\mathbb{R}$ који има коначну базу. **Димензију** простора $V$ дефинишемо као број елемената у било којој бази од $V$ и означавамо са $dimV$. Ако векторски простор $V$ нема коначну базу, кажемо да је бесконачне димензије.

**Пример 21.** Пар примера:

1. За векторски простор $V = \mathbb{R}^n$, његова база је $e = [e_1, \ldots, e_n]$, па је његова димензија $dimV = dim\mathbb{R}^n = n$.

2. За $V = M_{mn}(\mathbb{R})$, његова база је $e = [E_{ij}]$, па је његова димензија $dimV = dimM_{mn}(\mathbb{R}) = m \cdot n$.

**Важно:** Сваки линеарно независан систем (скуп) можемо допунити до бази и из сваке генератрисе се може издвојити база.

**Теорема 5.5.** Нека је $V$ векторски простор над $\mathbb{R}$, $dimV = n$ и $U \subseteq V$. Ако је $U \leq V$ тада важи:

1. $dimU \leq n$

2. Ако је $dimU = n$, онда је $U = V$.

*Доказ.* Доказујемо редом:

1. База од $U$ је линеарно независна у $V$ и може се допунити до базе у $V$, па по леми 5.3 је $dim U \leq n$.

2. Ако је $dim U = n$, онда је $U = \mathcal{L}(e)$, где је $e$ база од $U$ димензије $n$. Како је $\mathcal{L}(e) = V$ онда следи и да је $U = V$.

□

**Дефиниција 5.11.** Нека је $V$ векторски простор над $\mathbb{R}$ и нека је $e = [e_1, \ldots, e_n]$ његова база. Координате вектора $v$ у бази $e$ су бројеви $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, за које важи:

$$v = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$$

Ознака: $v_e = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$

Приметимо да важи $v = e \cdot v_e$.

### 5.2.1 Промена базе

Нека је $V$ векторски простор над $\mathbb{R}$ и нека су $e = [e_1, \ldots, e_n]$ и $f = [f_1, \ldots, f_n]$ две базе од $V$. Како да представимо једну базу преко друге?
Како је $e$ база, онда $f \subseteq \mathcal{L}(e)$ тј. вектори $f_1, \ldots, f_n$ су облика:

$$\left.\begin{array}{lcl} f_1 & = & \alpha_{11} e_1 + \ldots + \alpha_{n1} e_n \\ f_2 & = & \alpha_{12} e_1 + \ldots + \alpha_{n2} e_n \\ \vdots & & \\ f_n & = & \alpha_{1n} e_1 + \ldots + \alpha_{nn} e_n \end{array}\right\} (*)$$

Нека је $A$ матрица чије су колоне коррдинате вектора $f_i, i \in \{1, \ldots, n\}$ у бази $e$, тј.
$A_{\downarrow i} = (f_i)_e = \begin{bmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \end{bmatrix}$.

Систем $(*)$ има облик $[f_1, \ldots, f_n] = [e_1, \ldots, e_n] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$ тј. $f = e \cdot A$.

Матрицу $A$ називамо **матрица преласка** са базе $e$ на базу $f$, у ознаци $A = [f]_e$ или $A = A_{e \to f}$.
Шта се дешава са координатама неког вектора $v \in V$ ако променимо базу?
Нека је $v = e \cdot v_e = f \cdot v_f$. Одавде имамо да је $v = (e \cdot A_{e \to f}) \cdot v_f = e \cdot v_e$. Дакле, $v_e = A_{e \to f} \cdot v_f$, тј. $v_f = A_{e \to f}^{-1} \cdot v_e$.

# 6

# Линеарна пресликавања

**Дефиниција 6.1.** Нека су $V, W$ векторски простори над $\mathbb{R}$. За пресликавање $L : V \longrightarrow W$ кажемо да је линеарно пресликавање или хомоморфизам векторског простора ако важи:

1. $L(u+v) = L(u) + L(v)$ (адитивност)
2. $L(\alpha u) = \alpha L(u)$ (хомогеност)

За све $u, v \in V$ и $\alpha \in \mathbb{R}$
Услове 1. и 2. можемо заменити једним условом:

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v), \forall u, v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

**Коментар:** Приметимо да важи следеће: Ако је $L$ линеарно пресликавање, онда је:

$$L(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 L(u_1) + \alpha_2 L(u_2) + \ldots + \alpha_n L(u_n), \forall \alpha_i \in \mathbb{R}$$

$$L(0_v) = L(0 \cdot u) = 0 \cdot \underbrace{L(u)}_{\in W} = 0_w$$

$$L(-u) = L((-1)u) = (-1)L(u) = -L(u)$$

Дакле, ако је $L(0_v) \neq 0_w$, онда $L$ није линеарно пресликавање.
**Терминологија:**

$\mathcal{L}(V, W)$ - скуп свих линеарних пресликавања из векторског простора $V$ у векторски простор $W$.
ако је $V = W : \mathcal{L}(V, V) = \mathcal{L}(V)$ - скуп линеарних оператора векторског простора $W$
(ако је $L : V \longrightarrow V$ линеарни, $L$ називамо линеарни оператор векторског простора $V$)

**Дефиниција 6.2.** Нека је $L$ линеарно пресликавање:

- ако је $L$ "1-1", онда га називамо мономорфизам
- ако је $L$ "на", онда га називамо епиморфизам
- ако је $L$ бијекција, онда га називамо изоморфизам

**Дефиниција 6.3.** За векторске просторе $V$ и $W$ кажемо да су изоморфни, и пишемо $V \cong W$, ако постоји бар један изоморфизам $L : V \longrightarrow W$.

**Пример 22.** Примери линеарних пресликавања:

1. $V, W$векторски простори
   $L : V \longrightarrow W$
   $L(v) = 0_w, \forall v \in V$
   $L(\alpha u + \beta v) = 0_w = 0_w + 0_w = \underbrace{\alpha 0_w}_{=L(u)} + \underbrace{\beta 0_w}_{=L(v)} = \alpha L(u) + \beta L(v)$
   $\Longrightarrow$ $L$ је линеарно

2. $L : V \longrightarrow V$
   $L(v) = v, \forall v \in V$
   $L(\alpha u + \beta v) = \underbrace{\alpha u}_{L(u)} + \underbrace{\beta v}_{L(v)} = L(u) + L(v)$
   $\Longrightarrow$ $L$ је линеарни оператор
   $L = Id_v = I$

3. $A \in M_n(\mathbb{R})$ - фиксирана матрица
   А индукује једно пресликавање из $\overbrace{\mathbb{R}^n}^{=M_{n\times 1}(\mathbb{R})}$ у $\overbrace{\mathbb{R}^m}^{=M_m \times 1}$
   $L(X) = AX$, где је $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}.$
   $L(\alpha X_1 + \beta X_2) = A \cdot (\alpha X_1 + \beta X_2) = \alpha \underbrace{AX_1}_{L(X_1)} + \beta \underbrace{AX_2}_{L(X_2)} = \alpha L(X_1) + \beta L(X_2)$

4. $T_R : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, T_R$ - траг матрице
   $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, T_R(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$
   $A = [A_{ij}]$ и $B = [B_{ij}]$

   $T_R(\alpha A + \beta B) = (\alpha a_{11} + \beta b_{11}) + (\alpha a_{22} + \beta b_{22}) + \ldots + (\alpha a_{nn} + \beta b_{nn}) =$
   $\alpha \underbrace{(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})}_{T_R(A)} + \beta \underbrace{(b_{11} + b_{22} + \ldots + b_{nn})}_{T_R(B)} = \alpha T_R(A) + \beta T_R(B)$

## 6.1 Ранг и дефект линеарног пресликавања

**Дефиниција 6.4.** Нека су $V, W$ векторски простори, а $L : V \longrightarrow W$ линеарно пресликавање. Тада је **слика линеарног пресликавања**:

$$ImL = L(V) = \{L(v) | v \in V\}$$

**Тврђење 6.1.** Важи: $ImL \leq W$.

*Доказ.* Нека $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $w_1, w_2 \in ImL$. Из $w_1, w_2 \in ImL \implies w_1 = L(v_1), w_2 = L(v_2)$ за неке $v_1, v_2 \in V$.

$$\alpha w_1 + \beta w_2 = \alpha L(v_1) + \beta L(v_2) = L(\alpha v_1 + \beta v_2) \in ImL$$

□

**Дефиниција 6.5. Језгро линеарног пресликавања је:**

$$L^{-1}[\{0_w\}] = \{v \in V | L(v) = 0_w\} = KerL$$

**Тврђење 6.2.** Важи $KerL \leq V$

*Доказ.* Нека $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $v_1, v_2 \in KerL$. Из $v_1, v_2 \in KerL \implies L(v_1) = 0_w, L(v_2) = 0_w$.

$$L(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha \underbrace{L(v_1)}_{=0_w} + \beta \underbrace{L(v_2)}_{=0_w} = \alpha 0_w + \beta 0_w = 0_w \implies \alpha v_1 + \beta v_2 \in KerL$$

□

**Дефиниција 6.6.** Димензија векторског простора $ImL$ назива се ранг линеарног пресликавања. Димензија векторског простора $KerL$ назива се дефект линеарног пресликавања.
Ознаке:
$\rho(L) = dimImL$ - ранг линеарног пресликавања
$\delta(L) = dimKerL$ - дефект линеарног пресликавања

**Тврђење 6.3.** Ранг *мери* да ли је пресликавање "на":

$$L \text{ је „на"} \Leftrightarrow ImL = W \Leftrightarrow \rho(L) = dimW$$

*Доказ.* ($\Longrightarrow$) Нека је $L$ „на". Онда за сваки $\omega \in W$ постоји $v \in V$ тако да је $L(v) = \omega$. Одавнде закључујемо да је $ImL = W$, односно $\rho(L) = dimW$.
($\Longleftarrow$) Нека је $ImL = W$. Онда је $L(V) = W$, односно за сваки $\omega \in W$ постоји $v \in V$ тако да је $L(v) = \omega$. Значи, $L$ је „на". □

**Тврђење 6.4.** Дефект *мери* да ли је пресликавање "1-1:

$$L \text{ је „1-1"} \Leftrightarrow KerL = \{0_v\} \Leftrightarrow \delta(L) = 0$$

*Доказ.* ( $\Longrightarrow$ ) Ако је $L$ „1-1" онда се само $0_v$ слика у $0_w \implies KerL = \{0_w\}$
( $\Longleftarrow$ ) нека је $KerL = \{0_v\}$ :

$$L(u_1) = L(u_2) \implies L(u_1) - L(u_2) = 0_w \implies L(u_1 - u_2) = 0_w$$

$$\left.\begin{matrix} u_1 - u_2 \in KerL \\ KerL = 0_v \end{matrix}\right\} \implies u_1 - u_2 = 0, u_1 = u_2$$

□

**Важно:** Како наћи базу за слику и језгро (то јест како наћи ранг и дефект)?

Нека су $V, W$ векторски простори и нека је $L : V \longrightarrow W$ линеарно пресликавање

Нека је $e = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$ нека база за векторски простор $V$.

За свако $v \in V$ важи $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

$L(v) = \alpha_1 L(e_1) + \ldots + \alpha_n L(e_n)$

Дакле, сваки вектор из $ImL$ се може написати као линеарна комбинација вектора $L(e_1), L(e_2), \ldots, L(e_n)$

$\Longrightarrow ImL = \mathcal{L}(L(e_1), L(e_2), \ldots, L(e_n))$ из линеала издвојимо линеарно независне векторе и добијемо базу.

База језгра се тражи из дефиниције $KerL$:

$v \in KerL \Leftrightarrow L(v) = 0_w$

Добијамо систем хомогених једначина из кога нађемо $v$.

**Став о рангу и дефекту:** Ако је $L : V \longrightarrow W$ линеарно пресликавање, онда је

$$\rho(L) + \delta(L) = dimV.$$

*Доказ.* Нека $\delta(L) = dimKerL = k$. Узмимо произвољну базу језгра: $\widetilde{e} = [e_1, \ldots, e_k]$.. Допунимо ову базу до базе за В: $e = [e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_l]$. Приметимо да је $k + l = dimV$. Покажимо да је $\rho(L) = l$:

$$ImL = \mathcal{L}(\underbrace{L(e_1)}_{0_w}, \ldots, \underbrace{L(e_k)}_{0_w}, \ldots L(f_1), \ldots, L(f_l)) = \mathcal{L}(L(f_1), \ldots, L(f_l))$$

Остаје да покажемо да су $L(f_1), \ldots, L(f_n)$ линеарно независни.

$\alpha_1 L(f_1) + \ldots + \alpha_e L(f_e) = 0$
$\alpha_1 L(f_1) + \ldots + \alpha_e L(f_e) = 0 \implies \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_l f_l \in KerL$

Постоје $\beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{R}$ такви да је:

$\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_e f_l = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_k e_k$
$\beta_1 e_1 + \ldots + \beta_k e_k - \alpha_1 f_1 - \ldots - \alpha_e f_e = 0$ комбинација линеарно независних вектора $e_1, \ldots, e_k f_1, \ldots, f_e$

$\Longrightarrow \beta_1 = \ldots = \beta_k = \alpha_1 = \ldots = \alpha_e = 0$

Дакле, $[L(f_1), \ldots, L(f_e)]$ је линеарно независан систем па је он база од $ImL$

$$\Longrightarrow \rho(L) = dimImL = l$$

Закључујемо:

$dimKerL + dimImL = dimV$, тј.

$\delta(L) + \rho(L) = dimV$

□

**Последица 5.** $L : V \longrightarrow V$ је "1-1"$\Leftrightarrow$ је "на", то јест $\delta(L) = 0 \Leftrightarrow \rho(L) = n$, где је $n = dimV$

## 6.2 Матрица линеарног пресликавања

Нека су $V, W$ векторски простори, нека је $e = [e_1, \ldots, e_n]$ база векторског простора $V$, и нека је $f = [f_1, \ldots, f_n]$ база векторског простора $W$. Нека је $L : V \longrightarrow W$ линеарно пресликавање.

$v \in V : v = \alpha_1 + e_1 + \ldots + \alpha_n e_n \left( = e \cdot v_e = [e_1, \ldots, v_n] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \right)$

$L(v) = \alpha L(e_1) + \ldots + \alpha L(e_n) L(e) \cdot v_e$
$L(e) = [L(e_1), \ldots, L(e_n)]$
$L(e_1), \ldots, L(e_n) \in W$

$$\left.\begin{aligned} L(e_1) &= \alpha_{11} f_1 + \alpha_{21} f_2 + \ldots + \alpha_{m1} f_m \\ L(e_2) &= \alpha_{12} f_1 + \alpha_{22} f_2 + \ldots + \alpha_{m2} f_m \\ &\vdots \\ L(e_n) &= \alpha_{1n} f_1 + \alpha_{2n} f_2 + \ldots + \alpha_{mn} f_m \end{aligned}\right\} (*)$$

Нека је $A = [\alpha_{ij}]$, то јест $A_{\downarrow i} = (L(e_i))_f$ - и-та колона матрице $A$ је колона координата вектора $L(e_i)$ у бази $f$.
$L(e) = [f_1, \ldots, f_m] \cdot A \implies L(e) = f \cdot A$ - матрични запис за $(*)$.
*За било који вектор* $v \in V : L(v) = L(e) \cdot v_e = f \cdot A \cdot v_e$

Дакле, ако знамо слике базних вектора, онда лако проналазимо слику било ког вектора из векторског простора $V$.
$A = [L]_{ef}$ - Матрица пресликавања $L$ у пару база $(e, f)$
$[L]_{ef}$ потпуно одређује пресликавање $L$.
$[L]_{ef} \in M_{mn}(\mathbb{R})$, где је $m = dimW, n = dimV$.

**Матрица композиције линеарних пресликавања** Нека су $L : V \longrightarrow W$ и $G : W \longrightarrow T$ линеарна пресликавања. Нека су редом $e, f$ и $g$ базе векторских простора $V, W$ и $T$.
$(G \circ F)(u) = G(L(u))$
$G \circ F : V \longrightarrow T$ је линеарно пресликавање.
За $v \in V$ важи:
$L(v) = f \cdot A \cdot v_e$, где је $A = [L]_{ef}$.
За$w \in W$ важи:
$G(w) = g \cdot B \cdot w_f$, где је $B = [W]_{fg}$
Нека је $L(v) = w$, тада:
$G(L(v)) = g \cdot B \cdot (L(v))_f = g \cdot B \cdot \underbrace{w_f}_{A \cdot v_e} = g \cdot B \cdot A \cdot v_e$
Са друге стране, $G(L(v)) = g[G \circ L]_{eg} \cdot v_e$.
Дакле, $[G \circ L]_{ef} = [G]_{fg} \cdot [L]_{ef}$.

**Тврђење 6.5.** Нека је $dimV = dimW$ и нека је $e$ база за векторски простор $V$ а $f$ база за векторски простор $W$. Линеарно пресликавање $L : V \longrightarrow W$ је инвертибилно ако и само ако је $[L]_{ef}$ инвертибилна.

*Доказ.* $(\implies)$ :
Претпоставимо да је $L$ инвертибилно

постоји $L^{-1} : W \longrightarrow V$ такво да је $L^{-1} \circ L = Id_V$ и $L \circ L^{-1} = Id_W$.
$[L^{-1} \circ L]_{ee} = \underbrace{[Id_V]_{ee}}_{E}$
$[L^{-1}]_{fe} \cdot [L]_{ef} = E \implies [L]_{ef}$ је инвертибилна.

$(\Longleftarrow)$ :
Претпоставимо да је $[L]_{ef} = A$ инвертибилна:
Постоји $B$ такво да је $AB = E \implies B = A^{-1} = [L]_{ef}^{-1}$.
Посматрајмо пресликавање $G : W \longrightarrow V$ задато матрицом $[G]_{fe} = [L]_{ef}^{-1}$
$[G \circ L]_{ee} = [G]_{fe} \cdot [L]_{ef} = B \cdot A = A^{-1} \cdot A = E \implies G \circ L = Id_V$. □

Ако је дат $L : V \longrightarrow V$ линеарни оператор, и ако је $e$ база векторског простора $e$, чему је једнако$L^{-1}(v)$?
$[L] = A \implies L^{-1}(v) = e \cdot A^{-1} \cdot v_e$ јер је А инвертибилна

Нека је дато линеарно пресликавање $L : V \longrightarrow W$, и нека су базе векторских простора $V$ и $W$ редом $e = [e_1, \ldots, e_n]$ о $f = [f_1, \ldots, f_n]$
$\rho(L) = dim Im L$, а $Im L = \mathcal{L}(L(e_1), \ldots, L(e_n))$. Базу чине линеарно независни из $[(L(e_1), \ldots, L(e_n)]$.
$\rho(A) =$ број јединица на дијагонали у $A^0$. $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ има $n$ врста (вектори из $\mathbb{R}^n$) и $m$ колона (вектори из $\mathbb{R}^m$)
$\rho(A, \rightarrow) =$ *ранг врста* $=$ највећи број линеарно независних врста
$\rho(A, \downarrow) =$ *ранг колона* $=$ највећи број линеарно независних колона
Посматрајмо $A$ и $PA$, где је $P$ инвертибилна матрица добијена трансформацијама на врстама матрице $A$.
$A$ и $PA$ имају исти број колона $AX = 0 \Leftrightarrow PAX = 0$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \cdot A_{1\downarrow} + x_2 \cdot A_{2\downarrow} + \ldots + x_n \cdot A_{n\downarrow} = 0$$
$$\Leftrightarrow x_1 \cdot (PA)_{1\downarrow} + x_2 \cdot (PA)_{2\downarrow} + \ldots + x_n \cdot (PA)_{n\downarrow} = 0$$

Дакле, елементарним операцијама на врстама **не мења** се ранг врста, али ни ранг колона. Слично, елементарним операцијама на колонама **не мења** се ранг колона, али ни ранг врста.

Према томе, $\rho(A, \rightarrow) = \rho(A^0, \rightarrow)$ и $(A, \downarrow) = \rho(A^0, \downarrow)$
$(A^0, \rightarrow) = \rho(A^0, \downarrow) - \rho(A) =$ број јединица на дијагонали $A^0$

Закључујемо:
$\rho(A) =$највећи број линеарно независних врста
$=$највећи број линеарно независних колона.

Нека је $A = [L]_{ef}$, $A = [L(e_1)_f \quad L(e_2)_f \cdots \quad L(e_n)_f]$
$\rho(A) = \underbrace{\rho(A, \downarrow)}$
$=$ највећи број линеарно независних вектора
међу векторима $L(e_1)_f, \ldots, L(e_n)_f \in \mathbb{R}$
$\implies \rho([L]_{ef}) = \rho(L)$

## 6.3 Промена базе и матрица пресликавања

Нека је $L : V \longrightarrow W$ линеарно пресликавање, и нека су $e$ и $g$ базе векторског простора $V$, а $f$ и $h$ базе векторског простора $W$. Поставља се питање какав је однос $[L]_{ef}$ и $[L]_{gh}$?
$e$ и $g$ су базе векторског простора $V \implies g = e \cdot P$, где је $P$ матрица преласка (она је инвертибилна).
$f$ и $h$ су базе векторског простора $W \implies h = f \cdot Q$, где је $Q$ матрица преласка (она је такође инвертибилна.
Нека су $A = [L]_{ef}$ и $B = [L]_{gh}$. Ако $v \in V$ тада је:
$L(v) = f \cdot A \cdot v_e$ и $L(v) = h \cdot B \cdot v_g$
$h = f \cdot Q \implies f = h \cdot Q^{-1}$
$g = e \cdot P \implies v_e = P \cdot v_g$ (старе координате изражавамо преко нових), па је:
$L(v) = f \cdot A \cdot v_e = h \cdot Q^{-1} \cdot A \cdot P \cdot v_g$
$\implies B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$

Дакле, $[L]_{gh} = Q^{-1} \cdot [L]_{ef} \cdot P$, где је $g = e \cdot P$ и $h = f \cdot Q$.
Закључујемо да су све матрице пресликавања $L$ међусобно еквивалентне.

Ако је $[L]_{ef} = A$, онда постоје инвертибилне матрице $P$ и $Q$ за које је $A^0 = PAQ$.
Пресликавање $L$ у пару база $(g, h)$, где је $g = e \cdot Q$ и $h = f \cdot P^{-1}$, има баш матрицу $A^0 = [L]_{gh}$

За свако линеарно пресликавање $L : V \longrightarrow W$ постоји пар база $\bar{e}, \overline{f}$ у коме је:

$$[L]_{\bar{e}\bar{f}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

који садржи $r$ јединица на главној дијагонали, а остале нуле.
$L(\bar{e}_1) = \bar{f}_1$, $L(\bar{e}_2) = \bar{f}_2, \cdots, L(\bar{e}_r) = \bar{f}_r$
$L(\bar{e}_{r+1}) = L(\bar{e}_{r+1}) = \cdots = L(\bar{e}_n) = 0$

На основу претходног, постоји само коначно много различитих пресликавања векторског простора $W$ у векторски простор $W$, јер су пресликавања одређена својим рангом.

Нека је $L : \underset{\underset{e}{e}}{V} \longrightarrow \underset{\underset{f}{f}}{V}$ линеарни оператор . Тада је:
$[L]_e := [L]_{ee}$- матрица оператора $L$ у бази $e$ ( слике $e$-ова изразимо преко $e$-ова, $L(e) = e \cdot [L]_e$
$f = e \cdot P$, где је $\Pi$ матрица преласка (уједно инвертибилна).

Поставља се питање какав је однос $A = [L]_e$ и $B = [L]_f$. Ако је $v \in V$, тада је:

$$\left.\begin{array}{l} L(v) = e \cdot A \cdot v_e \\ L(v) = f \cdot B \cdot v_f \\ \\ \left.\begin{array}{l} e = f \cdot P^{-1} \\ v_e = P \cdot v_f \end{array}\right\} \implies L(v) = f\underline{P^{-1} \cdot A \cdot P} \cdot v_f \end{array}\right\} \implies [L]_f = P^{-1} \cdot [L]_e \cdot P, \text{где је } f = eP$$

**Дефиниција 6.7.** За матрице $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ кажемоп да су сличне ако постоји инвертибилна матрица $P$ таква да је $B = P^{-1}AP$. Ознака $A \simeq B$.
Релација $\simeq$ је релација еквиваленције на $M_n(\mathbb{R})$:

(Рефлексивна) $A \simeq A$ јер је $A = E^{-1} \cdot A \cdot E$

(Симетрична) $A \simeq B \implies B = P^{-1}AP \implies \underbrace{P}_{=(P^{-1})^{-1}} BP^{-1} = A \implies A \simeq B$

(Транзитивна) $\left.\begin{array}{l} A \simeq B \\ B \simeq C \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{l} B = P^{-1}AP \\ C = Q^{-1}BQ \end{array}\right\} \implies C = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ) \implies$ $A \simeq C$

Приметимо следеће:
Сличне матрице су и еквивалентне, обрнуто не важи
$A \simeq B$ то јест $B = P^{-1}AP$
$$\det B = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \cdot \det A \cdot \det P$$
$$= \frac{1}{\det P} \cdot \det A \cdot \det P = \det A$$

Нека је $\mathcal{L}(V, W) = \{L | L : V \to W \text{ линеарно } \}$ скуп свих линеарних пресликавања из векторског простора $V$ у векторски простор $W$.
Дефинишимо операције на $\mathcal{L}(V, W)$ :

- Сабирање пресликавања
  $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V, W)$
  $L := L_1 + L_2$
  За све $v \in V$ $L(v) = L_1(v) + L_2(v)$. Проверавамо да ли је $L \in \mathcal{L}(V, W)$, то јест да ли је $L$ линеарно?
  $$\begin{aligned} L(\alpha u + \beta v) &= L_1(\alpha u + \beta v) + L_2(\alpha u + \beta v) \\ &= \alpha L_1(u) + \beta L_2(v) + \alpha L_2(u) + \beta L_2(v) \\ &= \alpha(L_1(u) + L_2(u)) + \beta(L_1(v) + L_2(v)) \\ &= \alpha L(u) + \beta L(v) \implies L \in \mathcal{L}(V, W) \end{aligned}$$

- Множење пресликавања скаларом
  $\alpha \in \mathbb{R}$, $L \in \mathcal{L}(V, W)$ $L' := \alpha L$ за све $v \in V$ : $L'(v) = \alpha L(v)$. Проверавамо да ли је $L' \in \mathcal{L}(V, W)$, то јест да ли је $L'$ линеарно?
  $$\begin{aligned} L'(\beta u + \gamma v) &= \alpha L(\beta u + \gamma v) \\ &= \alpha(\beta L(u) + \gamma L(v)) \\ &= \beta(\alpha L(u)) + \gamma(\alpha L(u)) \\ &= \beta L'(u) + \gamma L'(v) \implies L' \in \mathcal{L}(V, W) \end{aligned}$$

$\mathcal{L}(v, W)$ са овако дефинисаним операцијама задовољава све аксиоме векторског простора. Штавише, $\mathcal{L}(V, W) \cong M_{mn}(\mathbb{R})$, ако је $dimV = n$, $dimW = m$

*Доказ.* Посматрајмо пресликавање: $F : \mathcal{L}(\underset{e}{V}, \underset{f}{W}) \longrightarrow M_{mn}\mathbb{R}$
Дефинисано са: $F(L) = [L]_{ef}$.
Јасно је да је за фиксирано $e$ и $f$ пресликавање $F$ бијекција, остаје да покажемо да је $F$ линеарно.
$F(\alpha L_1 + \beta L_2) = [\alpha L_1 + \beta L_2]_{ef} \stackrel{?}{=} \alpha F(L_1) + \beta F(L_2)$
$(\alpha L_1 + \beta L_2)(e_i) = \alpha L_e(e_i) + \beta L_2(e_i)$, за све $i$, па је
$(\alpha L_1 + \beta L_2)(e) = \alpha L_1(e) + \beta L_2(e)$

$(\alpha L_1 + \beta L_2)(e) = f \cdot [\alpha L_1 + \beta L_2]_{ef}$
$L_1(e) = f \cdot [L_1]_{ef}$ и $L_2(e) = f \cdot [L_2]_{ef}$
$f \cdot [\alpha L_1 + \beta L_2]_{ef} = f \cdot \alpha [L_1]_{ef} + f \cdot \beta [L_2]_{ef}$
$= f(\alpha [L_1]_{ef} + \beta [L_2]_{ef}$
$\implies [\alpha L_1 + \beta L_2]_{ef} = \alpha [L_1]_{ef} + \beta [L_2]_{ef}$
$F(\alpha L_1 + \beta L_2) = \alpha F(L_1) + \beta F(L_2)$
$\implies$ $F$ је линеарно пресликавање векторског простора $\mathcal{L}(V, W)$ у векторском простору $M_{mn}(\mathbb{R})$
$\implies F$ је изоморфизам
$dim\mathcal{L}(V, W) = m \cdot n = dimV \cdot dimW$

□

Сада ћемо погледати нека интересантна линеарна пресликавања у $\mathbb{R}^2$. Нека за следеће примере вази: $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ је линеарно пресликавање, и стандардна база за $\mathbb{R}^2 : e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1), e = [e_1, e_2]$

**Пример 23.** Рефлексија у односу на $x-$осу
$L((x, y)) = (x, -y)$
$[L]_e = [L(e_1) \quad L(e_2)] = [L(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) \quad L(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
$L((1, 0)) = (1, 0)$
$L(0, 1) = (0, -1)$

**Пример 24.** Рефлексија у односу на $y-$осу
$L((x, y)) = (-x, y)$
$[L]_e = [L(e_1) \quad L(e_2)] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$L(e_1) = L((1, 0)) = (-1, 0) = -e_1$
$L(e_2) = L((0, 1)) = (0, 1) = e_2$

**Пример 25.** Скалирање
$L((x, y)) = \alpha(x, y), \alpha \in \mathbb{R}$ $[L]_e = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$

**Пример 26.** Ротација за угао $\rho$ (контра од смера казаљки на сату)
$x_1 = \cos\rho, \quad y_1 = \sin\rho$
$x_2 = \cos(90° + \rho) = -\sin\rho$
$y_2 = \sin(90° + \rho) = \cos\rho$
$[L]_e = \begin{bmatrix} \cos\rho & -\sin\rho \\ \sin\rho & \cos\rho \end{bmatrix}$

## 6.4 Спостване вредности и сопствени вектори

**Дефиниција 6.8.** Нека је $L : V \longrightarrow V$ линеарни оператор. За скалар $\lambda \in \mathbb{R}$ кажемо да је сопствена вредност оператора $L$ ако постоје $v \in V, v \neq 0$ такав да је $L(v) = \lambda v$. Вектор $v$ називамо сопствени вектор који одговара сопственој вредности $\lambda$. Пар $(\lambda, v)$ називамо сопствени пар.

Нека је $\lambda$ фиксирано. Нека је $L(v) = \lambda v, v \neq 0$. Тада:
$L(v) = \lambda I(v)$

$L(v) = (\lambda I)(v)$
$L(v) - (\lambda I)(v) = 0$
$(L - \lambda I)(v) = 0$
$v \in Ker(L - \lambda I), v \neq 0.$

Дакле, $\lambda$ је сопствена вредност оператора $L$ ако и само ако потпростор $Ker(L - \lambda I)$ није тривијалан, односно $Ker(L - \lambda I) \neq \{0\}$
$Ker(L - \lambda I)$ је сопствени подпростор за сопствену вредност $\lambda$

Нека је $L : V \longrightarrow V$ линеарни оператор. Поставља се питање како наћи све сопствене вредности и сопствене векторе оператора $L$?
$L(v) = \lambda v, v \neq 0 \Leftrightarrow Ker(L - \lambda I) \neq \{0_v\}$
$L - \lambda I$ није "1-1"па није ни бијекција, па није ни инвертибилно. Дакле, $[L - \lambda I]_e$ није инвертибилна за било коју базу е
$A - \lambda E$ није инвертибилна $\Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$

Закључујемо: $\underline{\lambda \text{ је сопствена вредност ако и само ако је нула полинома } \det(A - \lambda E).}$

**Дефиниција 6.9.** Ако је $A \in M_n(\mathbb{R})$, полином $\chi_a(x) := \det(A - xE)$ зове се карактеристичан полином матрице $A$.

**Тврђење 6.6.** Сличне матрице имају исте карактеристичне полиноме.

*Доказ.* Доказујемо да сличне матрице имају исте карактеристичне полиноме:
$B = P^{-1}AP \implies \chi_b(x) = \chi_a(x)$

$$\begin{aligned}
\chi_b(x) = \det(B - xE) &= \det(P^{-1}AP - xE) \\
&= \det(P^{-1}AP - x(P^{-1}EP)) \\
&= \det(P^{-1}AP - P^{-1}(xE)P) \\
&= \det(P^{-1}(A - xE) \cdot P) \\
&= \det P^{-1} \cdot \det(A - xE) \cdot \det P \\
&= \tfrac{1}{\det P} \cdot \det(A - xE) \cdot \det P \\
&= \det(A - xE) = \chi_a, \text{ што је и требало доказати.}
\end{aligned}$$
□

**Дефиниција 6.10.** Ако је $L \in \mathcal{L}(V)$, карактеристичан полином оператора $L$ је карактеристичан полином било које његове матрице:

$$\chi_l(x) = \chi_{[L]_e}(x), \text{ где је } e \text{ произвољна база.}$$

Нека је $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$. Тада је:

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - x \end{vmatrix} = (a_{11}-x)(a_{22}-x)\cdot\ldots\cdot(a_{nn}-x)+\ldots = (-1)^n x^n + \ldots$$

$\implies deg\chi_a(x) = n$ ако $A \in M_n(\mathbb{R})$, водећи коефицијент је $(-1)^n$. Важи да је: $\chi_A(0) = \det(A - 0 \cdot E) = \det A$, па је слободан члан полинома $\chi_A$ једнак $\det A$

Како налазимо сопствене вредности оператора $L$?
Нека је $L(v) = \lambda v, v \neq 0 \Leftrightarrow v \in Ker(L - \lambda I), v \neq 0$. Посматрајмо $A = [L]_e$.
Пронађу се решења хомогеног система $(A - \lambda E) \cdot X = 0$, $X = v_e \neq 0$
$v = e \cdot v_e \leftarrow$ сопствени вектор за сопствену вредност $\lambda$.

## 6.5 Дијагонализација

**Дефиниција 6.11.** За линеарни оператор $L : V \longrightarrow V$ кажемо да је дијагоналног типа (односно дијагоналан) ако у бар једној бази има дијагоналну матрицу.

$$[L]_f = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \implies \left.\begin{matrix} L(f_1) = \lambda_1 \cdot f_1 \\ L(f_2) = \lambda_2 \cdot f_2 \\ \vdots \\ L(f_n) = \lambda_2 \cdot f_n \end{matrix}\right\} \implies \begin{matrix} f_1, f_2, \ldots, f_n \text{ су сопствени вектори} \\ \text{оператора } L \end{matrix}$$

$$\implies \begin{matrix} L \text{ има } n = dimV \text{ линеарно} \\ \text{независних сопствених вектора} \end{matrix}$$

Важи и обрнуто, ако $L$ има $n = dimV$ линеарно независних сопствених вектора, онда ће у бази састављеној од тих њих $L$ имати дијагоналну матрицу.

**Дефиниција 6.12.** За матрицу $A \in M_n(\mathbb{R})$ кажемо да је дијагоналног типа ако је слична дијагоналној, то јест ако постоји инвертибилна матрица $P$ и дијагонална матрица $D$ за које је $P^{-1}AP = D$.

Како испитати да ли је матрица дијагоналног типа и ако јесте наћи $P$ и $D$?
$P/\ P^{-1}AP = D \Leftrightarrow AP = PD \Leftrightarrow (AP)_{\downarrow j} = (PD)_{\downarrow j}$ за све $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned} (AP)_{\downarrow j} &= P \cdot (\lambda_j \cdot E_{\downarrow j}) \\ &= \lambda_j \cdot P \cdot E_{\downarrow j} \\ &= \lambda_j (PE)_{\downarrow j} \\ &= \lambda_j \cdot P_{\downarrow j}, \text{ где је } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Дакле, $P^{-1}AP = D$ ако и само ако матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ има $n$ линеарно независних сопствених колона (вектора).

Ако $A$ има $n$ линеарно независних сопствених вектора, од њих се прави матрица $P$, а од сопствених вредности се направи матрица $D$, водећи рачуна о редоследу:

$$P = [P_1 \quad P_2 \quad \cdots \quad P_n] \implies D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \text{где су } (\lambda_i, P_i),\ i \in \{1, \ldots, n\} \\ \text{одговарајући сопствени парови} \end{matrix}$$

За матрицу дијагоналног типа лако рачунамо степене.

Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$ матрица дијагоналног типа, и нека $P^{-1}AP = D \implies A = PDP^{-1}$, и нека

$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$. Тражимо $A^m$.

$A^m = (PDP^{-1})^m = PD\underbrace{P^{-1}P}_{E}D\underbrace{P^{-1}P}_{E}\cdots\underbrace{P^{-1}P}_{E}DP^{-1} = PD^mP^{-1} = P\cdot \begin{bmatrix} \lambda_1^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^m \end{bmatrix}\cdot$

$P^{-1}$

# 7

# Еуклидски векторски простори

**Дефиниција 7.1.** Нека је $V$ векторски простор над пољем $\mathbb{R}$. Скаларни производ на $V$ је свако пресликавање $\circ : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ које пару вектора из $V$ додељује реалан број и за које важе следеће особине:

1. $(u + v) \circ \omega = u \circ \omega + v \circ \omega$ (адитивност)
2. $(\alpha \cdot u) \circ v = \alpha \cdot (u \circ v)$ (хомогеност)
3. $u \circ v = v \circ u$ (комутативност)
4. $u \circ u \geq 0$ и $u \circ u = 0 \Longleftrightarrow u = 0_v$ (позитивна дефинитност)

за све $u, v, \omega \in V$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.

Користи се и ознака $< u, v >$.

**Последица 6.** Последице својстава скаларног производа:

1. $a \circ 0_v = 0$
2. $(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n) \circ v = \alpha_1 (u_1 \circ v) + \ldots + \alpha_n (u_n \circ v)$

*Доказ.* Доказујемо редом:

1. $a \circ 0_v = 0_v \circ a = (0 \cdot u) \circ a \overset{2.}{=} 0 \cdot \underbrace{(u \circ a)}_{\in \mathbb{R}} = 0$
2. Доказ преко математичке индукције.
   (**База индукције**) За $n = 1$ је $(\alpha_1 u_1) \circ v \overset{2.}{=} \alpha_1 (u \circ v)$.
   (**Индуктивна хипотеза**) Претпоставимо да за неко $n > 1$ тврђење важи.
   (**Индуктивни корак**) Нека је $u \in V$ задат као $u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$. Сада је:

$$
\begin{aligned}
(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n + \alpha_{n+1} u_{n+1}) \circ v &= (u + \alpha_{n+1} u_{n+1}) \circ v \\
&\overset{1.}{=} u \circ v + (\alpha_{n+1} u_{n+1}) \circ v \\
&\overset{2.}{=} (\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n) \circ v + \alpha_{n+1} (u_{n+1} \circ v) \\
&\overset{\text{И.Х.}}{=} \alpha_1 (u_1 \circ v) + \ldots + \alpha_n (u_n \circ v) + \alpha_{n+1} (u_{n+1} \circ v)
\end{aligned}
$$

$\square$

**Дефиниција 7.2.** Пар $(V, \circ)$, где је $V$ коначнодимензиони векторски простор над пољем $\mathbb{R}$ са скаларним производом $\circ$, назива се **еуклидски векторски простор**.

**Пример 27.** Неколико примера еуклидских векторских простора:

1. $V = \mathbb{R}^n$.
   $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \circ (y_1, y_2, \ldots, y_n) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$. Овде је $\circ$ стандардни скаларни производ.
2. $V = \mathbb{R}^2$.
   На истом векторском простору можемо дефинисати на више начина скаларни производ: $(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$
3. $V = M_n(\mathbb{R})$.
   За $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ је $A \circ B = T_R(A^TB)$
4. $V = \mathbb{R}^3[x] = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] | deg\mathrm{p} < 3\}$.
   За $p, q \in \mathbb{R}^3[x]$ важи $p \circ q = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$

## 7.1 Норма

**Дефиниција 7.3.** Нека је $(V, \circ)$ еуклидски векторски простор и $u \in V$. Број $\sqrt{u \circ u}$ се назива **норма** (дужина) вектора $u$, у ознаци $||u||$.

**Тврђење 7.1.** Важи следеће:

1. $||u|| = 0 \iff u = 0_v$
2. $||\alpha \cdot u|| = |\alpha| \cdot ||u||$

*Доказ.* Доказујемо редом:

1. $||u|| = 0 \iff \sqrt{u \circ u} = 0 \iff u \circ u = 0 \overset{4.}{\iff} u = 0_v$
2. $||\alpha u|| = \sqrt{(\alpha u) \circ (\alpha u)} = \sqrt{\alpha^2(u \circ u)} = |\alpha| \cdot ||u||$

□

**Нормирање вектора** Ако узмемо да је $\alpha = \frac{1}{||u||}$ (из претходног тврђења), онда је $||\alpha \cdot u|| = 1$. За дати вектор $u$, вектор $\frac{u}{||u||}$ има дужину 1.

**Пример 28.** $\mathbb{R}^n$ са стандардним векторским производом. Нека је $u \in \mathbb{R}^n$, $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Онда је $||u|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

**Тврђење 7.2.** Ако је $(V, \circ)$ еуклидски векторски простор, онда за све $u, v \in V$ важи:

1. $|u \circ v| \leq ||u|| \cdot ||v||$ (Коши-Шварцова неједнакост)
2. $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$ (Неједнакост троугла или неједнакост Липковског)

*Доказ.* Доказујемо редом:

1. Посматрајмо вектор $v - x \cdot u$, $x \in \mathbb{R}$. Важи да је $(v - xu) \circ (v - xu) \geq 0$. Сада имамо:

$$v \circ v - x(u \circ v) - x(v \circ u) + x^2(u \circ u) \geq 0$$
$$v \circ v - 2x(u \circ v) + x^2(u \circ u) \geq 0$$

Ако обележимо $u \circ u$ са $a$, $u \circ v$ са $b$ и $v \circ v$ са $c$, добијамо:

$$ax^2 - 2bx + c \geq 0$$

где је $a \geq 0$ (јер је $u \circ u \geq 0$). Сада имамо два случаја:

(а) Ако је $a = 0$, тада је $u \circ u = 0$, па је $u = 0_v$. Сада је:

$$|u \circ v| = |0_v \circ v| = |0| \leq 0 \cdot ||v|| = ||0_v|| \cdot ||v|| = ||u|| \cdot ||v||$$

(б) Ако је $a > 0$, онда за све $u \neq 0_v$ важи да је функција $f(x) = ax^2 - 2bx + c \geq 0$, одакле следи да је дискриминанта ове фунцкије мања од нуле, односно

$$\begin{aligned} D = 4b^2 - 4ac \leq 0 &\Longrightarrow b^2 - ac \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow (u \circ v)^2 - \underbrace{(u \circ u)}_{=||u||^2} \cdot \underbrace{(v \circ v)}_{=||v||^2} \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow (u \circ v)^2 \leq ||u||^2 \cdot ||v||^2 \quad /\sqrt{} \\ &\Longleftrightarrow |u \circ v| \leq ||u|| \cdot ||v|| \end{aligned}$$

чиме је неједност доказана.

2. Имамо:

$$\begin{aligned} ||u + v||^2 = (u + v) \circ (u + v) &= u \circ u + v \circ u + u \circ v + v \circ v \\ &= ||u||^2 + \underbrace{2(u \circ v)}_{\leq 2|u \circ v|} + ||v||^2 \\ &\leq ||u||^2 + 2|u \circ v| + ||v||^2 \\ \text{Коши-Шварц} \rightarrow &\leq ||u||^2 + 2 \cdot ||u|| \cdot ||v|| + ||v||^2 \\ &= (||u|| + ||v||)^2 \end{aligned}$$

Дакле $||u + v||^2 \leq (||u|| + ||v||)^2$, односно $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$

□

**Дефиниција 7.4.** Нека је $(V, \circ)$ еуклидски векторски простор. Угао између вектора $u, v$ се дефинише као

$$\varphi = \arccos \frac{u \circ v}{||u|| \cdot ||v||}$$

и обележава се као $\measuredangle(u, v)$. Угао између $0_v$ и било ког вектора из $V$ дефинишемо са $\measuredangle(0_v, u) \coloneqq \frac{\pi}{2}$

Дакле, $u \circ v = ||u|| \cdot ||v|| \cdot \cos \measuredangle(u, v)$. Приметимо да важи: $\measuredangle(u, v) = \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow v \circ v = 0$.

**Дефиниција 7.5.** За векторе $u$ и $v$ у еуклидском векторском простору $(V, \circ)$ кажемо да су **ортогонални** ако је $u \circ v = 0$ и пишемо $u \perp v$.

**Теорема 7.1.** (Питагорина теорема) Ако је $u \circ v = 0$, где $u, v \in V$ ($V$ је еуклидски векторски простор), тада је:

$$||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$$

*Доказ.* Важи следеће:

$$\begin{aligned} ||u+v||^2 = (u+v)\circ(u+v) &= u\circ u + u\circ v + v\circ u + v\circ v \\ &= u\circ u + 2\underbrace{(u\circ v)}_{=0} + v\circ v \\ &= u\circ u + v\circ v \\ &= ||u||^2 + ||v||^2 \end{aligned}$$

□

**Дефиниција 7.6.** Нека је $V$ еуклидски векторски простор и $X \subseteq V$ његов произвољан подксуп. Кажемо да је $v \in V$ ортогоналан на $X$, и пишемо $u \perp X$, ако је $v \perp x$ за свако $x \in X$. Скуп $X^\perp = \{v \in V | v \perp X\}$ се зове ортогонал скупа $X$.

**Тврђење 7.3.** Нека је $V$ еуклидски векторски простор и $X \subseteq V$ његов произвољан подскуп. Важи да је $X^\perp \leq V$.

*Доказ.* Нека је $u, v \in X^\perp$, тј. $u, v \perp x$ за све $x \in X$. Треба показати да, за неке $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ важи $\alpha u + \beta v \in X^\perp$. Имамо:

$$(\alpha u + \beta v)\circ x = \alpha\underbrace{(u\circ x)}_{=0} + \beta\underbrace{(v\circ x)}_{=0} = \alpha\cdot 0 + \beta\cdot 0 = 0$$

за све $x \in X$. Значи $\alpha u + \beta v \in X^\perp$. □

Скуп је ортогоналан када су сви његови вектори међусобно ортогонални.

**Дефиниција 7.7.** Нека је $V$ еуклидски векторски простор и $e = [e_1, \ldots, e_n]$ једна његова база. База $e$ је **ортогонална** ако је $e_i \circ e_j = 0$ за $i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j$. Додатно, ако $e$ и нормирамо добијамо **ортонормирану** базу за чије векторе важи:

$$e_i \circ e_j = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$$

**Пример 29.** Нека је $V = \mathbb{R}^n$ и $e = [e_1, \ldots, e_n]$ његова ортонормирана база. За векторе $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ и $v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$ $(\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, \ldots, n\})$ важи:

$$u \circ v = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n$$

У односу на ортонормирану базу, сваки скаларни производ има стандрадну форму. Шта више, важи:

$$u \circ e_i = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n)\circ e_i = \alpha_i(e_i \circ e_i) = \alpha_i$$

па је

$$u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = (u\circ e_1)e_1 + (u\circ e_2)e_2 + \ldots + (u\circ e_n)e_n$$

Значи, координате вектора у ортонормираној бази су скаларни производи тог вектора и одговарајућих базних.

**Лема 7.1.** Сваки ортогонални систем вектора је линеарно независан.

*Доказ.* Нека је $[v_1, \dots, v_n]$ ортогоналан систем вектора, где $v_i \neq 0_v, i \in \{1, \dots, n\}$. Важи да је $v_i \circ v_j = 0, i \neq j$. Нека је:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0_v \quad / \circ v_i \\ \Longrightarrow &\alpha_i \underbrace{(v_i \circ v_i)}_{>0} = 0 \\ \Longrightarrow &\alpha_i \text{ за све } i \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

Дакле, систем $[v_1, \dots, v_n]$ је линеарно независан. □

**Теорема 7.2.** (Грам-Шмит) Нека је $e$ произвољна база еуклидског векторског простора $V$. Тада постоји ортонормирана база $f = [f_1, \dots, f_n]$ простора $V$ за чије векторе важи:

$$\mathcal{L}(f_1, \dots, f_k) = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_k) \text{ за све } 1 \leq k \leq n$$

и $f_i \circ e_i > 0$ за све $1 \leq i \leq n$.

*Доказ.* Доказ математичком индукцијом по $n$.
(**База индукције**) $n = 1$. Ако је $\mathcal{L}(f_1) = \mathcal{L}(e_1)$ онда је $f_1 = \alpha e_1$. Из

$$||f_1|| = ||\alpha e_1|| = |\alpha| ||e_1|| = 1$$

следи да је $\alpha = \frac{1}{||e_1||}$. Такође из

$$f_1 \circ e_1 = \alpha \underbrace{(e_1 \circ e_1)}_{>0} > 0$$

следи да је $\alpha > 0$, тј. $\frac{1}{||e_1||} > 0$, па је $f_1 = \frac{e_1}{||e_1||}$
(**Индуктивна хипотеза**) Претпоставимо да тврђење теореме важи за $n$ базних вектора.
(**Индуктивни корак**) Доказујемо да важи и за $n+1$ базни вектор. Нека је $[f_1, \dots, f_n]$ већ конструисани ортонормирани систем за који је $\mathcal{L}(f_1, f_2, \dots, f_n) = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_n)$. Дакле, сада се питамо када је $\mathcal{L}(f_1, \dots, f_n, v) = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$?
Одговор је када је $v = \alpha_1' e_1 + \alpha_2' e_2 + \ldots + \alpha_n' e_n + \alpha e_{n+1}$, где је $\alpha \neq 0$ (иначе би $v \in \mathcal{L}(e_1, \dots, e_n)$, па би $\mathcal{L}(e_1, \dots, e_n) = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$ и $e_{n+1} \in \mathcal{L}(e_1, \dots, e_n)$, а то не може јер су $e_1, \dots, e_n, e_{n+1}$ линеарно независни вектори). Даље ћемо рачунати са $f$-овима јер је лакше (то можемо да урадимо јер је $\mathcal{L}(e_1, \dots, e_n) = \mathcal{L}(f_1, \dots, f_n)$ према индукцијској хипотези):

$$v = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n + \alpha e_{n+1}$$

Желимо да је $v \perp f_1, \dots, v \perp f_n$, тј да је $v \circ f_1 = v \circ f_2 = \ldots = v \circ f_n$.

$$\begin{aligned} v \circ f_1 &= \alpha_1 + \alpha \cdot (e_{n+1} \circ f_1) \\ v \circ f_2 &= \alpha_2 + \alpha \cdot (e_{n+1} \circ f_2) \\ &\vdots \\ v \circ f_n &= \alpha_n + \alpha \cdot (e_{n+1} \circ f_n) \end{aligned}$$

па је

$$\alpha_1 + \alpha \underbrace{(e_{n+1} \circ f_1)}_{=\lambda_1} = 0$$
$$\alpha_2 + \alpha \underbrace{(e_{n+1} \circ f_2)}_{=\lambda_2} = 0$$
$$\vdots$$
$$\alpha_n + \alpha \underbrace{(e_{n+1} \circ f_n)}_{=\lambda_n} = 0$$

где скаларе $\lambda_i = e_{n+1} \circ f_i, i \in \{1, \dots n\}$ можемо да израчунамо. Значи:

$$\alpha_1 = -\alpha\lambda_1$$
$$\alpha_2 = -\alpha\lambda_2$$
$$\vdots$$
$$\alpha_n = -\alpha\lambda_n$$

одакле следи да је

$$v = -\alpha\lambda_1 f_1 - \alpha\lambda_2 f_2 - \dots - \alpha\lambda_n f_n + \alpha e_{n+1}$$

Скалар $\alpha$ налазимо из услова $||v|| = 1$ и због $e_{n+1} \circ v$ скалар $\alpha$ мора бити позитиван. Дакле:

$$f_{n+1} = \frac{1}{\hat{f}_{n+1}} \cdot \hat{f}_{n+1}, \text{ где је } \hat{f}_{n+1} = e_{n+1} - \lambda_1 f_1 - \lambda_2 f_2 - \dots - \lambda_n f_n$$

□

**Грам-Шмитове формуле** Ако је $e = [e_1, \dots, e_n]$ произвољна база еуклидског векторског простора $V$, $\hat{f} = [\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n]$ ортогонална база конструисана од $e$ и $f = [f_1, \dots, f_n]$ ортонормирана база конструисана од $e$, на основу претходног доказа, Грам-Шмитове формуле гласе:

$$\hat{f}_1 = e_1$$
$$\hat{f}_2 = e_2 - (e_2 \circ f_1) \cdot f_1$$
$$\vdots$$
$$\hat{f}_n = e_n - (e_n \circ f_1) f_1 - (e_n \circ f_2) f_2 - \dots - (e_n \circ f_{n-1}) f_{n-1}$$

и

$$f_1 = \frac{1}{||\hat{f}_1||} \cdot \hat{f}_1$$
$$f_2 = \frac{1}{||\hat{f}_2||} \cdot \hat{f}_2$$
$$\vdots$$
$$f_n = \frac{1}{||\hat{f}_n||} \cdot \hat{f}_n$$

## 7.2 Ортогоналне матрице

**Теорема 7.3.** Нека је $e$ ортонормирана база еуклидског векторског простора $V$ и $f = e \cdot P$ за неку матрицу $P$. Тада је $f$ ортонормирана база простора $V$ ако и само ако за матрицу $P$ важи $P^T \cdot P = E$.

*Доказ.* Нека је $e = [e_1, \ldots, e_n]$ ортонормирана база еуклидског векторског простора $V$ и нека је $P = [\alpha_{ij}], i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Важи:

$$f = eP \iff f_i = \alpha_{1i}e_1 + \alpha_{2i}e_2 + \ldots + \alpha_{ni}e_n, \text{ за све } 1 \leq i \leq n$$

па је

$$f_i \circ f_j = \alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \ldots + \alpha_{ni}\alpha_{nj}$$

односно

$$f_i \circ f_j = P_{\downarrow i} \cdot P_{\downarrow j} = P^T_{i\to} \cdot P_{\downarrow i} = (P^T P)_{ij}$$

Дакле

$$\begin{aligned} f \text{ је ортонормирана база } &\iff f_i \circ f_j = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} \\ &\iff (P^T P)_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

то јест $P^T \cdot P = E$. □

**Дефиниција 7.8.** Матрица $P$ за коју важи $P^T \cdot P = E$, односно $P^{-1} = P^T$, зове се ортогонална матрица.

Другим речима, $P$ је ортогонална ако су њене колоне ортогоналне у односу на стандардни скаларни производ у $\mathbb{R}^n$.

**Тврђење 7.4.** Ако је матрица $P$ је ортогонална, онда је $\det P = 1$ или $\det P = -1$.

*Доказ.* Имамо следећи низ импликација:

$$\begin{aligned} P \text{ је ортогонална} &\Longrightarrow \det(P^T \cdot P) = \det E = 1 \\ \text{(Бине-Коши)} \to &\Longrightarrow \det(P^T) \cdot \det P = 1 \\ \text{(Последица 3)} \to &\Longrightarrow (\det P)^2 = 1 \\ &\Longrightarrow \det P = 1 \text{ или } \det P = -1 \end{aligned}$$

□

**Пример 30.** Које су матрице формата 2 над $\mathbb{R}$ ортогоналне?
Нека је $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Из $P^T \cdot P = E$ имамо:

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ba + dc & b^2 + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Одакле следи да је:

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 &= 1 \\ ab + cd &= 0 \\ b^2 + d^2 &= 1 \end{aligned}$$

Сада, постоје $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$ такви да је $a = \cos\alpha, b = \cos\beta, c = \sin\alpha, d = \sin\beta$. Када претходно уврстимо у $ab + cd = 0$ добијамо:

$$\begin{aligned} &\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = 0 \\ \Longrightarrow &\cos(\alpha - \beta) = 0 \end{aligned}$$

Одавде следи да је $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$ или $\alpha - \beta = -\frac{\pi}{2}$, односно $\alpha = \beta + \frac{\pi}{2}$ или $\alpha = \beta - \frac{\pi}{2}$. Дакле, добијамо два типа ортогоналних матрица реда 2 над $\mathbb{R}$:

$$P = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad \text{или} \qquad P = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

Прва ортогонална матрица представља матрицу ротације за угао $\alpha$, док друга представља матрицу симетрије (односно осне рефлексије).

## 7.3 Ортогонална пројекција

**Теорема 7.4.** За сваки потпростор $W$ еуклидског векторског простора $V$ важи да је $W \oplus W^{\perp} = V$, а тиме и $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$

*Доказ.* Кренимо од произвољне базе $[e_1, \ldots, e_k]$ векторског простора $W$ и допунимо је до базе $[e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n]$ целог простора $V$. Када ортонормирамо базу $[e_1, \ldots, e_n]$ Грам-Шмитовим формулама, добијамо ортонормирану базу $[f_1, \ldots, f_k, f_{k+1}, \ldots, f_n]$. Одавде следи да је $[f_1, \ldots, f_k]$ ортонормирана база за $W$ (зато што Грам-Шмит чува линеале у сваком кораку, тј. $\mathcal{L}(e_1, \ldots, e_k) = \mathcal{L}(f_1, \ldots, f_k)$). Сада тражимо $W^{\perp}$:

$$\begin{aligned} v = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n \in W^{\perp} &\Longleftrightarrow v \perp w, w \in W \\ &\Longleftrightarrow v \perp f_i, 1 \leq i \leq k \\ &\Longleftrightarrow v \circ f_i = 0, 1 \leq i \leq k \\ &\Longleftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k \text{ (јер је } f \text{ ортонормирана база и важи } v \circ f_i = \alpha_i) \\ &\Longleftrightarrow v = \alpha_{k+1} f_{k+1} + \alpha_{k+2} f_{k+2} + \ldots + \alpha_n f_n \\ &\Longleftrightarrow v \in \mathcal{L}(f_{k+1}, \ldots, f_n) \\ &\Longleftrightarrow W^{\perp} = \mathcal{L}(f_{k+1,\ldots,f_n}) \end{aligned}$$

Дакле, $W = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_n)$ и $W^{\perp} = \mathcal{L}(e_{k+1}, \ldots, e_n)$, па је $[e_1, \ldots, e_k] \cup [e_{k+1}, \ldots, e_n]$ база за $V$, што значи да је $V = W \oplus W^{\perp}$. □

**Последица 7.** Нека је $V$ еуклидски векторски простор и $W$ његов потпростор. За сваки вектор $v \in V$ постоје јединствени вектори $\overline{v} \in W$ и $v' \in W^{\perp}$ за које је $v = \overline{v} + v'$.

*Доказ.* Једнакост се директно добије из претходне теореме. □

**Дефиниција 7.9.** Нека је $V$ еуклидски векторски простор и $W$ његов потпростор, и нека је $v = \overline{v} + v' \in V$, где је $\overline{v} \in W$ и $v' \in W^{\perp}$. Вектор $\overline{v}$ се зове **ортогонална пројекција** вектора $v$ на потпростор $W$ (у ознаци $\overline{v} = \mathrm{pR_w} v$), док се вектор $v'$ зове **ортогонална допуна** (или ортогонални комплемент) вектора $v$ (у ознаци $v' = v^{\perp}$).

**Пример 31.** Нека је $W = \{(x,0)|x \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}^2$. До целог простора $\mathbb{R}$ можемо га допунити било којим потпростором димензије 1 који је различит од њега (односно било којом правом кроз $(0,0)$), али само је $\{(0,y)|y \in \mathbb{R}\}$ и ортогоналан на $W$.

**Пример 32.** Како наћи ортогоналну пројекцију неког вектора $v \in V$ ($V$ је еуклидски векторски простор) на потпростор $W \leq V$?
Нека је $[e_1, \ldots, e_k]$ произвољна база потпростора $W$. Вектор $v$ разлажемо на пројекцију и допуну:

$$v = \mathrm{pR_w} v + v' = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_k e_k + v', v' \in W^\perp$$

Пројекцију налазимо када одредимо $\alpha_1, \ldots \alpha_k$:

$$\left.\begin{array}{rcl} v \circ e_1 & = & \alpha_1(e_1 \circ e_1) + \ldots + \alpha_k(e_k \circ e_1) + \underbrace{v' \circ e_1}_{=0} \\ v \circ e_1 & = & \alpha_1(e_1 \circ e_1) + \ldots + \alpha_k(e_k \circ e_1) + \underbrace{v' \circ e_1}_{=0} \\ & \vdots & \\ v \circ e_1 & = & \alpha_1(e_1 \circ e_1) + \ldots + \alpha_k(e_k \circ e_1) + \underbrace{v' \circ e_1}_{=0} \end{array}\right\} (*)$$

Производе $v \circ e_i$ и $e_i, e_j$, где $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, можемо да израчунамо ($v$ и база $e$ су унапред дати), преостаје да решимо систем (*) по $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

## 7.4 Растојање у еуклидском векторском простору

**Дефиниција 7.10.** Нека је $V$ еуклидски векторски простор и $u, v \in V$. **Растојање** између вектора $u$ и $v$ дефинишемо као:

$$d(u,v) = ||u - v||$$

$d(u,v)$ још називамо и еуклидским растојањем.

**Тврђење 7.5.** Еуклидско растојање има следећа својства:

1. $d(u,v) \geq 0$
2. $d(u,v) = 0$ ако и само ако је $u = v$
3. $d(u,v) = d(v,u)$
4. $d(u,v) \leq d(u,\omega) + d(\omega,v)$

*Доказ.* Својства простичу из својстава норме. □

**Тврђење 7.6.** Нека је $V$ еуклидски векторски простор и $X, Y \subseteq V$ и $X, Y \neq \emptyset$. Растојање између два непразна скупа подразумева „најмање ” растојање између тачака тих скупова, тј.

$$d(X,Y) = \inf\{d(x,y)|x \in X, y \in Y\}$$

*Доказ.* Директно из дефиниције еуклидског растојања. □

**Тврђење 7.7.** Нека је $V$ еуклидски векторски простор и $W \leq V$. За неки вектор $v \in V$ важи:

$$d(v,W) = \inf\{d(v,\omega)|\omega \in W\}$$

*Доказ.* Директно из претходног тврђења (за $X = \{v\}$ и $Y = W$). $\square$

**Тврђење 7.8.** Нека је $V$ еуклидски векторски простор и $W \leq V$. За неки вектор $v \in V$ важи:

$$d(v, W) = d(v, \mathrm{pR_w} v)$$

*Доказ.* За вектор $v \in V$ важи $v = \underbrace{\mathrm{pR_w} v}_{\in W} + \underbrace{v'}_{\in W^\perp}$. Како је $v' \in W^\perp$, следи да је $v' \perp \omega$, за све $\omega \in W$.
Нека је $\omega \in W$ произвољан, и нека је $\omega_1 = \omega - \mathrm{pR_w} v$. Из $\omega_1 \in W$ следи да је $v' \perp \omega_1$, па на основу теореме 7.1 имамо:

$$\begin{aligned} & ||v' - \omega_1||^2 = ||v'||^2 + ||\omega_1||^2 \\ \Longleftrightarrow & ||(v - \mathrm{pR_w} v) - (\omega - \mathrm{pR_w} v)||^2 = ||v'||^2 + ||\omega_1||^2 \\ \Longleftrightarrow & ||v - \omega||^2 = ||v'||^2 + ||\omega_1||^2 \geq ||v'||^2 \\ \Longrightarrow & ||v - \omega|| \geq ||v'|| \text{ тј. } \underbrace{||v - \omega||}_{d(v,\omega)} \geq \underbrace{||v - \mathrm{pR_w} v||}_{d(v, \mathrm{pR_w} v)} \end{aligned}$$

Дакле, $d(v, \omega) \geq d(v, \mathrm{pR_w} v)$. Једнакост ће да важи када је $\omega = \mathrm{pR_w} v$. Закључујемо:

$$d(v, W) = d(v, \mathrm{pR_w} v) = ||v - \mathrm{pR_w} v||$$

$\square$

**Дефиниција 7.11.** Угао између вектора и потпростора се дефинише као угао између вектора и његове пројекције на тај потпростор:

$$\measuredangle(v, W) = \measuredangle(v, \mathrm{pR_w} v)$$