Фибоначијев низ

Ива Живановић

фебруар 2026.

Садржај

1 Увод

Фибоначијев низ је један од најпознатијих низова у математици и има бројне примене у природи, алгоритмима и финансијским моделима. Овај текст пружа кратку дефиницију, основне резултате и занимљиве примере Фибоначијевог низа.

Дефиниција 1.1 (Фибоначијев низ)**.** *Фибоначијев низ* $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ *је низ целих бројева дефинисан следећом рекурзијом:*

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1,$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \forall n \geq 2.$$

Чланови Фибоначијевог низа су:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

Алтернативни облик овог низа је са нулом на почетку:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

1.1 Задатак са зечевима

Фибоначи је у својој *Књизи о абакусу* поставио проблем зечева, те је тако и открио и дефинисао овај математички низ.

Задатак 1. *Сваки пар зец-зечица (стари најмање два месеца) добија током сваког следећег месеца пар младих: зеца и зечицу. Ако је на почетку године био један новорођени пар, колико ће бити укупно парова зечева почетком следеће године? Претпостављамо да зечеви не умиру.*

Решење: Нека је F_n број парова зец-зечица после n месеци, тј. током $(n+1)$-ог месеца од почетка године.

Према претпоставци $F_0 = 1$ и $F_1 = 1$, број F_n, $n \geq 2$, добија се из рекурзивне једначине

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

односно као збир парова из претходна два месеца.

Тако добијамо низ:

Одакле видимо да ће након годину дана бити $F_{12} = 233$ парова зечева.

У табели можемо видети како се решење мења у зависности од почетног броја (0 или 1).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377
f_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

2 Основна теорема

Теорема 2.1 (Бинетова формула)**.** *За сваки природни број $n \geq 0$, n-ти број у Фибоначијевом низу може се изразити формулом:*

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}},$$

где су

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{\textit{и}} \quad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

3 Својства

Неколико занимљивих својстава Фибоначијевог низа:

- Суму првих n Фибоначијевих бројева можемо изразити као:

$$\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1.$$

- Однос узастопних Фибоначијевих бројева

$$\frac{F_{n+1}}{F_n}$$

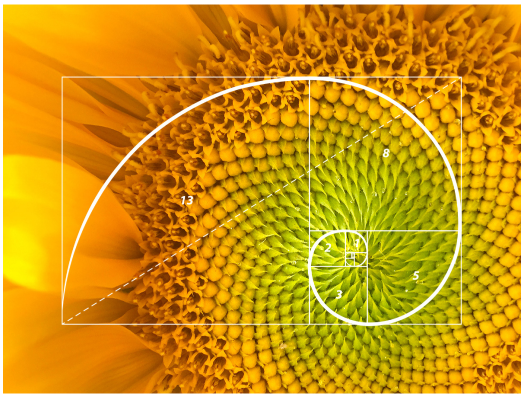
  тежи златном пресеку када $n \to \infty$.

4 Примери и примене

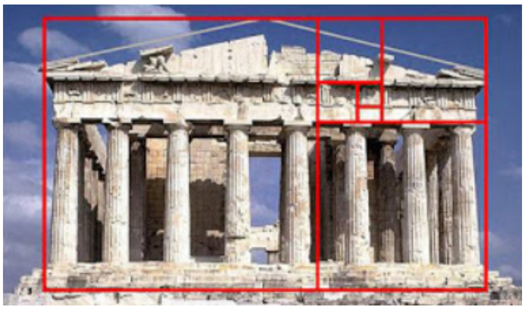
Фибоначијев низ се често јавља у природи и уметности:

- Распоред латица цвећа и семенки сунцокрета.
- Спирале шишарки.
- Архитектура и златни пресек.

Многи алгоритми у информатици се такође ослањају на Фибоначијев низ: сортирање, рекурзије и динамичко програмирање.



Слика 1: Сунцокрет



Слика 2: Партенон, Атина

5 Закључак

Фибоначијев низ је једноставан за дефинисање али има дубоке математичке и практичне примене. Његова рекурзивна структура, затим Бинетова формула и својства златног пресека чине га занимљивим и често проучаваним низом у различитим областима науке.

Литература

[1] Николай Николаевич Воробьев, *Числа Фибоначчи*

[2] Richard A. Dunlap, *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*, Dalhousie University, Canada

[3] Sarah C. Campbell, *Growing Patterns: Fibonacci Numbers in Nature*

[4] Википедија: Фибоначијев низ, приступ 2026-02-15.